Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2011

Mathematik mit CAS

N

Aufgaben

Hinweise für Schüler

Aufgabenwahl:

Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B.
Der Teil A ist von allen Prüfungsteilnehmern zu bearbeiten.
Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen.

Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung unter erhöhten Anforderungen ablegen, bearbeiten zusätzlich den Prüfungsteil B.

Von den Aufgaben B1 und B2 ist **eine** auszuwählen.

Bearbeitungszeit:

Allen Prüfungsteilnehmern steht eine Bearbeitungszeit von 195 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Den Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter erhöhten Anforderungen ablegen, stehen zusätzlich 60 Minuten Bearbeitungszeit zur Verfügung.

Hilfsmittel:

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind zugelassen:

- das an der Schule eingeführte Tafelwerk,
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner und das zugelassene CAS,
- Zeichengeräte
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung. (Schülerinnen und Schüler, deren Muttersprache nicht die deutsche Sprache ist, können als zusätzliches Hilfsmittel ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter Form verwenden. Näheres regelt die Schule.)

Hinweis:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.
In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa drei Viertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

Sonstiges:

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen,
- vollständiger Lösung einer zusätzlichen Wahlaufgabe.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

A1 Analysis

1 . Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\sqrt{3+x}\cdot(3-x)\,;\, x\in DB$

Ihr Graph ist F.

1.1 Geben Sie alle reellen Zahlen an, für die der Funktionsterm definiert ist.

Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von F mit den Koordinatenachsen an, berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes und prüfen Sie F auf die Existenz von Wendepunkten.

1.2 Die Gerade mit der Gleichung $y=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$ ist eine Tangente an F.

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Berührungspunktes.

Diese Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

1.3 F schließt mit der x - Achse eine Fläche ein.
Ermitteln Sie deren Inhalt und Umfang.
Bestimmen Sie eine Gleichung einer Geraden, die diese Fläche halbiert.

1.4 Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen ganzrationalen Funktion g zweiten Grades, deren Graph G dieselben Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen wie F hat.

$$\left(Zur\ \ Kontrolle:\ g(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{3}\,x^2+3\sqrt{3}\right)$$

Stellen Sie G und F in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar.

G und F schließen im 2. Quadranten eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

A2 Analytische Geometrie

2 Gegeben sind die Punkte A(5 | – 2 | 1), B(3 | 4 | – 2), C(– 2 | 2 | 0), S(2 | 2 | 5) und die Gerade g durch die Gleichung

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 6{,}8 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4{,}8 \\ -1{,}8 \end{pmatrix}; t \in R$$

.

2.1.1 Bestimmen Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E, die die Punkte A, B und C enthält.

(zur Kontrolle: z. B. $6x + 19y + 34z - 26 = 0$)

2.1.2 Weisen Sie nach, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft.
Begründen Sie, dass der Punkt S auf der Geraden g liegt.
Berechnen Sie den Abstand der Geraden g zur Ebene E.

2.1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes auf der Geraden g, der von den Punkten A und B denselben Abstand hat.

2.2 Die Punkte A, B, C und S sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

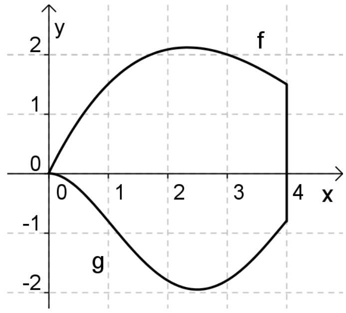
2.2.1 Stellen Sie die Pyramide und die Gerade g in einem Koordinatensystem grafisch dar.

2.2.2 Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.

2.2.3 Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Seitenkante AS gegenüber der Fläche ABC.

2.2.4 Eine Ebene enthält die Gerade g und den Punkt A. Diese Ebene teilt das Dreieck ABC in zwei Teilflächen. Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte dieser Teilflächen.

A 3 Analysis und Stochastik



3.1 Die Abbildung zeigt die Grundfläche eines Werkstücks. In einem kartesischen Koordinatensystem wird die Grundfläche begrenzt durch die Graphen der Funktionen f und g sowie die Gerade mit der Gleichung x = 4.
Es gilt 1LE = 1 cm.

3.1.1 Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Der Graph verläuft durch den Koordinatenursprung, die Punkte A(1 | 1,5) sowie B(3 | 2) und hat an der Stelle x = 3 den Anstieg $-\frac{1}{3}$.
Stellen Sie eine Funktionsgleichung für die Funktion f auf.
(zur Kontrolle: $f(x) = 0{,}0417\,x^3 - 0{,}583\,x^2 + 2{,}04\,x$)

3.1.2 Die Funktionsgleichung der Funktion g lautet:
$g(x) = -0{,}05\,x^4 + 0{,}5\,x^3 - 1{,}25\,x^2$.
Die Dicke des Werkstückes wird durch die Funktion d mit $d(x) = f(x) - g(x)$ festgelegt. Ermitteln Sie die maximale Dicke des Werkstückes.

3.1.3 Das Werkstück soll aus hochfestem Aluminium mit einer Dichte von $2{,}8\ g \cdot cm^{-3}$ hergestellt werden. Das Werkstück ist gerade, hat in jeder Höhe denselben Querschnitt und ist 5 cm hoch.
Berechnen Sie die Masse des Werkstückes.

3.2 Bei der Produktion des Werkstückes treten mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% Fehler bei der Materialverarbeitung und mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% Fehler bei der Oberflächenbearbeitung auf. Diese Fehler treten unabhängig voneinander auf. Weitere Fehler gibt es nicht.

3.2.1 Der laufenden Produktion wird zufällig ein Werkstück entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Das Werkstück ist fehlerfrei.
B: Das Werkstück weist beide Fehler auf.
C: Das Werkstück weist genau einen der beiden Fehler auf.

Der Produktionsumfang der vergangenen Woche betrug 10371 Stück.
Berechnen Sie wie viele fehlerhafte Werkstücke bei einer Kontrolle zu erwarten sind.

3.2.2 Die Oberflächenbearbeitung soll durch ein neues Verfahren verbessert werden. Dadurch wird angestrebt, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers in der Oberflächenbearbeitung auf 3% zu senken.
Der laufenden Produktion werden 50 Stück entnommen und auf Fehler in der Oberflächenbearbeitung überprüft. Werden mehr als drei fehlerhafte Werkstücke gefunden wird das neue Verfahren abgelehnt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Verfahren abgelehnt wird, obwohl die angestrebte Fehlertoleranz tatsächlich erreicht wird.

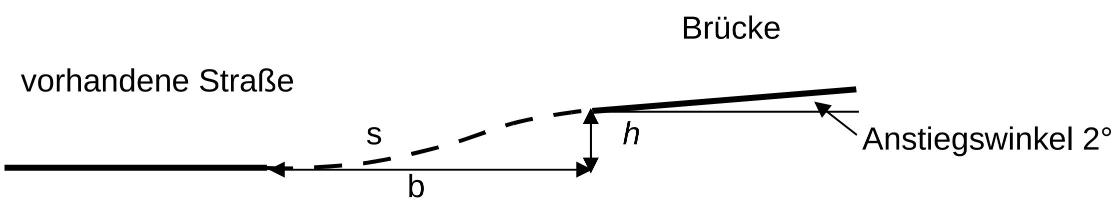
B 1 Analysis

1.1 Gegeben ist eine Funktionenschar h_a durch die Gleichung

$$h_a(x) = \frac{a}{30}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Ermitteln Sie die Anzahl der Extremstellen von h in Abhängigkeit von a.

1.2 Im Zuge des Baus einer neuen Autobahn wurde für eine kleinere Straße der Bau einer Brücke notwendig, welche bereits errichtet wurde. Die Brücke hat eine Steigung von 2°. Es soll eine Zufahrt von der vorhandenen, horizontal verlaufenden Straße zur Brücke gebaut werden, wobei die Übergänge jeweils knickfrei sein müssen.
Der Verlauf der Straße s kann in einem geeigneten Koordinatensystem durch den Graphen einer ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben werden (in der Abbildung gestrichelt dargestellt).



b = 300 m

h = 25 m

Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion, mit der der Verlauf des Straßenneubaus s beschrieben werden kann.

(Eine mögliche Lösung lautet: $f(x) = -1{,}464 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 7{,}169 \cdot 10^{-4} \cdot x^2$)

Bei der Planung wurde diskutiert, ob die Zufahrt eventuell zu steil werden könnte.

Berechnen Sie den größten Anstiegswinkel für den Neubau s und bewerten Sie die Befürchtungen.

Die Straße s wird 6,0 m breit. Zum Abschluss der Bauarbeiten soll eine Asphaltdecke aufgetragen werden.

Bestimmen Sie die Größe der Fläche, die im Zuge der Baumaßnahmen asphaltiert werden muss.

B2 Analytische Geometrie und Analysis

2 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte der Pyramide ABCS sowie der Punkt L durch ihre Koordinaten gegeben.

$$A\left(\frac{3}{2};0;0\right), B(3;2;0), C(0{,}2;0), S\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2};3\right) \text{ und } L\left(\frac{3}{2};3;0\right)$$

.

Der Punkt L und die beiden Punkte E und F, die sich auf den Kanten $\overline{BS}$ bzw. $\overline{CS}$ der Pyramide ABCS befinden, spannen eine Ebene ε_{ELF} auf.
Durch den Schnitt der Ebene ε_{ELF} mit der Pyramide ABCS entsteht die Fläche DEF (siehe Abbildung).

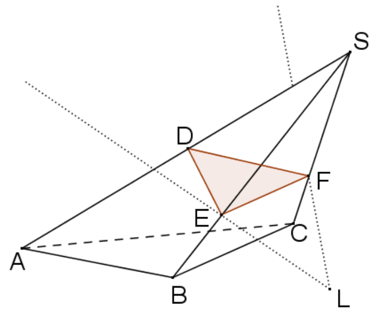


Abbildung nicht maßstäblich

Weiterhin ist ein Verhältnis $T = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{BS}|} = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{CS}|}$ definiert.

2.1 Zunächst wird die Lage der Punkte E und F durch das Verhältnis $T = \frac{1}{3}$ festgelegt.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte E, F und D.

$$\left(\text{zur Kontrolle}: D\left(\frac{3}{2};\frac{21}{10};\frac{9}{5}\right)\right)$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche DEF.
Ermitteln Sie den Neigungswinkel dieser Fläche gegenüber der Grundfläche ABC.

2.2 Der Flächeninhalt A der Fläche DEF kann in Abhängigkeit vom Verhältnis T durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$A(T)=\frac{3\cdot(T-1)^2\cdot\sqrt{45\cdot T^2-12\cdot T+4}}{2\cdot(2\cdot T+1)};T\in R;0\le T<1$$

Berechnen Sie für folgende Werte T die Flächeninhalte: $T\in\left\{0;\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\}$.
Stellen Sie die berechneten Wertepaare und den Graphen der Funktion A(T) in einem Koordinatensystem im Intervall $0 \le T < 1$ dar.

Ermitteln Sie T so, dass die Fläche DEF einen Inhalt A von 1 FE besitzt.

Bestimmen Sie mithilfe der berechneten Wertepaare eine ganzrationale Funktion vierten Grades und beurteilen Sie die Brauchbarkeit dieser Funktion für die Bestimmung des Flächeninhaltes A in Abhängigkeit von T.