Ein frohes Osterfest:

A1 Analysis

1 Gegeben ist eine Schar von Funktionen durch

$f_t(x) = \frac{1}{t^2}x^3 - \frac{t}{3}x + t - 3;\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$. Ihre Graphen heißen F_t.

Weiterhin ist die Funktion $h(x) = -2x - 6,\ x \in \mathbb{R}$ gegeben. Ihr Graph heißt H.

1.1 Stellen Sie die Funktionen f_t für $t = -3$ und für $t = 3$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar.

Zeigen Sie, dass F_t für negative Werte von t keine Extrempunkte besitzt. Ermitteln Sie für positive Werte von t die Koordinaten der Extrempunkte und weisen Sie die Art der Extrema nach.

Jeder Graph der Funktionenschar besitzt genau einen Wendepunkt. Beschreiben Sie die besondere Lage aller Wendepunkte der Schar.

Wenn Sie versuchen, mit Ihrem CAS die Nullstellen der Funktion für allgemeines t zu bestimmen, erhalten Sie vermutlich keine Lösung. Begründen Sie mithilfe von Funktionseigenschaften, dass jede Funktion der Schar dennoch mindestens eine Nullstelle hat.

1.2 Die Graphen H, F_{-3} und F_3 schließen eine Fläche A vollständig ein. Berechnen Sie, welcher Anteil von A im vierten Quadranten liegt. Bestimmen Sie den Umfang der Fläche A.

1.3 Es gibt eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften.
(1) Ihr Graph hat die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$.
(2) An der Stelle x = 3 hat ihr Graph den Anstieg 2.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Funktion und prüfen Sie, ob diese ein Element der Funktionenschar ist.

A 1 Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g mit ihren Gleichungen $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ und $g(x) = -\frac{9}{1280}x^4 + \frac{9}{40}x^2 - \frac{9}{5}$ sowie $x \in \mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie für den Graphen von f die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie der Extrempunkte und bestimmen Sie die Art der Extrema. Zeichnen Sie diesen Graphen im Intervall $-2 \le x \le 2$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

1.2 Die Gerade mit der Gleichung $y = 1{,}5$ schließt mit dem Graphen von f mehrere Flächen vollständig ein. Bestimmen Sie den Gesamtinhalt dieser Flächen.

1.3 Weisen Sie nach, dass sich die Graphen von f und g nie unter einem rechten Winkel schneiden.

1.4 In der Praxis werden Flüssigkeiten in oben offenen Auffangbecken gespeichert, deren Boden gewölbt ist und deren ebene Stirnflächen senkrecht nach unten verlaufen. Die mit A, B, C und D bezeichneten Eckpunkte des Beckens bilden ein Rechteck mit $\overline{AB} = 5\,m$.

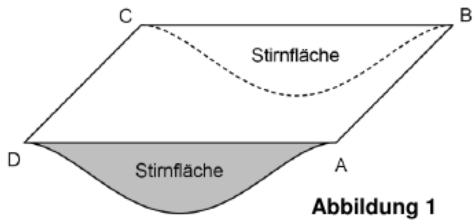

Abbildung 1

Ein solches Becken hat überall denselben Querschnitt.
Im Modell wird dieser Querschnitt unten durch eine Parabel und oben durch eine Gerade begrenzt (siehe Abbildung 1). Im Koordinatensystem liegen die Gerade auf der x-Achse und die Parabel symmetrisch zur y-Achse.
Die Parabel wird durch den Graphen der Funktion g im Intervall $-4 \le x \le 4$ erfasst. Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter.

1.4.1 Aus Sicherheitsgründen dürfen die Wände ungesicherter Auffangbecken nirgends steiler als $30°$ sein. Andernfalls müssen sie umzäunt werden. Überprüfen Sie, ob die Errichtung eines Zauns für dieses Auffangbecken auch entlang der Seiten AB und CD erforderlich ist.

1.4.2 Gegen Witterungseinflüsse wird dieses Becken mit einer an den Stirnseiten offenen Kunststoffhaube geschützt (siehe Abbildung 2). Ihr Querschnitt wird durch den Graphen der Funktion $q(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ im Intervall $-4 \le x \le 4$ modelliert $(x \in \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Größe der Fläche der Abdeckung.

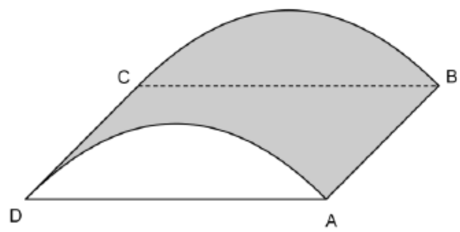

Abbildung 2

1.4.3 Das Auffangbecken ist bis zu einem Drittel seiner Höhe gefüllt. Ermitteln Sie, wie viel Liter Flüssigkeit noch in dieses Becken fließen können, sodass es randvoll gefüllt ist.

A2 Analytische Geometrie

2 Ein Magier möchte für seine Show einen neuen Zaubertrick entwickeln. Dazu wird ein Kasten in Form eines quadratischen Pyramidenstumpfes benötigt. In einem kartesischen Koordinatensystem haben die Eckpunkte des Pyramidenstumpfes folgende Koordinaten

$A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(80 \mid 0 \mid 0)$, $C(80 \mid 80 \mid 0)$, $D(0 \mid 80 \mid 0)$, $E(10 \mid 10 \mid 140)$, $F(70 \mid 10 \mid 140)$, $G(70 \mid 70 \mid 140)$ und $H(10 \mid 70 \mid 140)$. (1 LE = 1 cm)

2.1 Stellen Sie den Pyramidenstumpf in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar.

2.2 Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Punkte C, D und G enthält.
Zeigen Sie, dass der Punkt H in dieser Ebene liegt.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen der Grundfläche ABCD und der Seitenfläche CDHG.

2.3 Prüfen Sie, ob die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche als Höhe des Pyramidenstumpfes angesehen werden kann.

2.4 Eine Seitenfläche des Pyramidenstumpfes soll mit Blattsilber belegt werden. Blattsilber wird in Packungen zu je 25 Blatt der Größe 95 mm x 95 mm angeboten.
Berechnen Sie die Kosten, wenn eine Packung 20,15 € kostet, nur ganze Packungen verkauft werden und kein Verschnitt entsteht.

2.5 Während der Show platziert der Magier eine Person so im Kasten, dass der Kopf aus einer kreisrunden Öffnung der Deckfläche herausschaut.
Dann sticht der Magier mehrere Degen durch vorbereitete Öffnungen in den Seitenflächen des Kastens.
Einer dieser Degen durchsticht die Seitenfläche ABFE im Punkt $R(30 \mid 5 \mid 70)$, verläuft geradlinig in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ und trifft die Seitenfläche CDHG im Punkt S.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S sowie die Größe des Winkels zwischen Degen und Seitenfläche CDHG.

Der Magier möchte einen Sportdegen mit einer Klingenlänge von 90 cm verwenden.
Prüfen Sie rechnerisch, ob nach dem Durchstoßen des Kastens von R zu S noch mindestens 10 cm der Klinge von außen zu sehen sind.

A 3 Stochastik

Die Verwaltung einer Stadt in Mecklenburg-Vorpommern gab als Veranstalter eines Volksfestes 2008 eine repräsentative Umfrage in Auftrag, die über Wirtschaftswert des Volksfestes, Besucherstruktur, Image und Unterhaltungswert Auskunft geben sollte.
Die überwiegende Mehrheit der Festbesucher kam mit 72% aus M-V (M), 9% der Gäste reisten aus den übrigen deutschen Bundesländern (D) an. Die restlichen 19% der Festgäste kamen aus dem Ausland (A).

3.1 Bei der Umfrage wurden zwei Besucher nach ihrem Herkunftsort mit den Antwortmöglichkeiten M, D, A befragt.

Stellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständiges Baumdiagramm auf und geben Sie eine Ergebnismenge Ω an.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E1: Beide Besucher stammen aus Mecklenburg-Vorpommern.

E2: Mindestens ein Besucher kommt aus dem Ausland.

3.2 Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausländischen Besucher bei einer Befragung von 5 Personen.

Begründen Sie, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann.
Berechnen Sie für jeden Wert von X die Wahrscheinlichkeit und stellen Sie diese Wahrscheinlichkeitsverteilung grafisch dar.

3.3 Vier Besucher wurden bezüglich ihrer Anfahrt befragt. Ein Großteil der Besucher benutzte öffentliche Verkehrsmittel (O), die anderen private Fahrzeuge (P).

Geben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen der Ergebnismenge an.

E3: Genau drei Personen fahren mit einem privaten Fahrzeug.

E4: Die dritte Person fährt mit öffentlichen Verkehrsmitteln.

Formulieren Sie das Gegenereignis von E4 in Worten.

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

3.4 Das Volksfest war ein Fest für alle Generationen, Jung und Alt feierten gemeinsam. So hatte die Altersgruppe „30 Jahre und älter“ einen Anteil von 53%. Weibliche Besucher waren mit 49% vertreten. Rund 6% aller Festbesucher waren Kinder (unter 14 Jahre).

3.4.1 Man geht bei der Befragung davon aus, dass die Eigenschaften „Geschlecht“ und „Alter“ voneinander unabhängig sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Befragung die Person

- männlich und „unter 30“ ist.
- weiblich und nicht „unter 30“ ist.

Am Eingang einer bei allen Festbesuchern besonders beliebten Attraktion wird geprüft, wie viele der Besucher Kinder sind.

3.4.2 Es werden 120 Besucher dieser Attraktion befragt. Die Befragung kann als Bernoulli-Kette aufgefasst werden.

Mit wie vielen Kindern muss bei der Prüfung gerechnet werden?

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 120 Befragten

- genau 10 Kinder sind.
- mindestens 2, aber weniger als 8 Kinder gefunden werden.

3.4.3 Berechnen Sie, wie viele Personen befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens zwei Kinder unter den Besuchern zu finden.