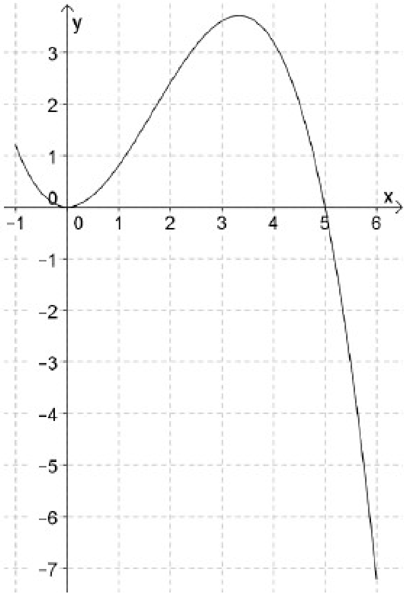
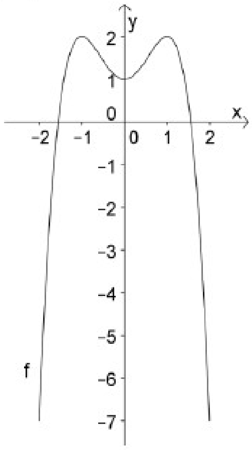
Aufgabe A1

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
1.1	**Gleichung der Funktion g** $g(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \qquad g'(x)=3a\cdot x^2+2b\cdot x+c$ I $\quad O(0 \mid 0) \quad \rightarrow g(0)=0$ II $\quad A\left(2 \,\middle|\, \frac{12}{5}\right) \quad \rightarrow g(2)=\frac{12}{5}$ III $\quad B\left(\frac{5}{3} \,\middle|\, \frac{50}{27}\right) \quad \rightarrow g\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{50}{27}$ IV $\quad m=\frac{5}{3} \quad \rightarrow g'\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$ $g(x)=-\frac{1}{5}x^3+x^2$	4	
1.2.1	**Darstellung des Graphen**  **Nullstellen** $x_1=0$ und $x_2=5$ **Ableitungen** $f'(x)=-\frac{3}{5}x^2+2x \quad f''(x)=-\frac{6}{5}x+2 \quad f'''(x)=-\frac{6}{5}$ **Extrempunkte** Notw. Bed.: $f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x_{E_1}=0$ und $x_{E_2}=\frac{10}{3}$ Hinr. Bed.: $f''(0)=2>0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt y-Koordinate: $f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad T(0 \mid 0)$ $f''\left(\frac{10}{3}\right)=-2<0 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt y-Koordinate: $f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{100}{27} \quad \Rightarrow \quad H\left(\frac{10}{3} \,\middle|\, \frac{100}{27}\right)$	2 2 5	

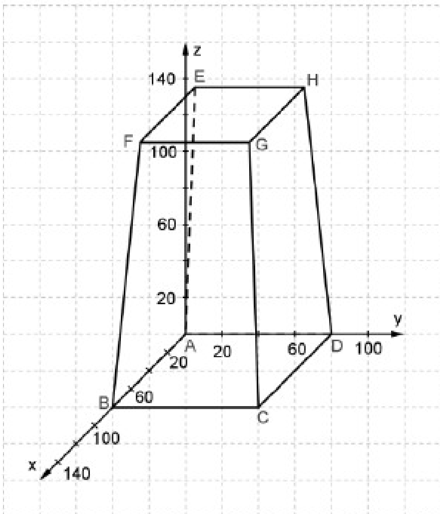
	Wendepunkte Notw. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = \frac{5}{3}$ y-Koordinaten: $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{50}{27} \quad \Rightarrow W\left(\frac{5}{3} \middle\vert \frac{50}{27}\right)$	2	
1.2.2	**Extremwertberechnung** Zielfunktion: $A = g \cdot h = u \cdot f(u)$ Nebenbedingung: $f(u) = -\frac{1}{5}u^3 + u^2$ Einsetzen der Nebenbedingung in die Zielfunktion: $A(u) = u \cdot \left(-\frac{1}{5}u^3 + u^2\right)$ Ableitungsfunktionen: $A'(u) = -\frac{4}{5}u^3 + 3u^2 \qquad A''(u) = -\frac{12}{5}u^2 + 6u$ Notw. Bed.: $A'(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_E = 0$ (entfällt) $u_E = \frac{15}{4} = 3{,}75$ Hinr. Bed.: $A''\left(\frac{15}{4}\right) = -\frac{45}{4} < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum **maximaler Flächeninhalt** $A\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{3375}{256} \approx 13{,}2\,\text{FE}$	4	
1.2.3	**Inhalt der Fläche für t = 2** $A = \int_0^5 (f(x) - h_2(x))\,dx \approx 19{,}24\,\text{FE}$ **Umfang der Fläche für t = 2** Umfang = Länge des Graphen von f über dem Intervall [0; 5] + Länge des Graphen von h_2 über dem Intervall [0; 5] + Abstand der Graphen von f und h_2 an der Stelle 5 $u = \int_0^5 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx + \int_0^5 \sqrt{1 + [h_2'(x)]^2}\,dx + (f(5) - h_2(5))$ $\approx 9{,}38 + 6{,}48 + 1{,}68 = 17{,}54\,\text{LE}$ **Bestimmung von t** $\int_0^5 (f(x) - h_t(x))\,dx > 55 \quad \Rightarrow \quad t > 10{,}11$ ab t = 11	1 2 2	

Aufgabe A1

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
1.1	$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen $0 = -x^4 + 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \pm\sqrt{\sqrt{2}+1} \qquad f(0) = 1$ $S_{x_1}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} \mid 0\right) \quad S_{x_2}\left(-\sqrt{\sqrt{2}+1} \mid 0\right) \quad S_y(0 \mid 1)$	3	
	Ableitungen $\quad f'(x) = -4x^3 + 4x \qquad f''(x) = -12x^2 + 4$	5	
	Extrema Notw. Bedingung: $f'(x_E) = 0$ $x_{E1} = -1,\ x_{E2} = 0,\ x_{E3} = 1$ Hinr. Bedingung: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$ $f''(x_{E1}) = -8 < 0 \Rightarrow HP$; $f''(x_{E2}) = 4 > 0 \Rightarrow TP$; $f''(x_{E3}) = -8 > 0 \Rightarrow HP$ Funktionswerte $f(x_{E1}) = 2,\ f(x_{E2}) = 1,\ f(x_{E3}) = 2$ $H_1(-1 \mid 2) \quad T(0 \mid 1) \quad H_2(1 \mid 2)$ graphische Darstellung 	3	
1.2	Schnittstellen des Graphen f und der Geraden $f(x) = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} \approx \pm 1{,}31 \quad x_{3;4} \approx \pm 0{,}54$ $A = 2 \cdot \int_{-1{,}31}^{-0{,}54} \left(f(x) - 1{,}5\right)dx + \int_{-0{,}54}^{0{,}54} \left(1{,}5 - f(x)\right)dx \approx 0{,}49 + 0{,}35 = 0{,}84$	5	
1.3	Stellen, an denen die Graphen sich schneiden $f(x) = g(x)$ $-x^4 + 2x^2 + 1 = -\frac{9}{1280}x^4 + \frac{9}{40}x^2 - \frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} \approx \pm 1{,}67$ Anstiege der Tangenten von f: $\quad f'(x) = -4x^3 + 4x$ $f'(-1{,}67) \approx 12{,}0 \qquad f'(1{,}67) \approx -12{,}0$ Anstiege der Normalen von g: $\quad -\frac{1}{g'(x)} = \frac{320}{9x \cdot (x^2 - 16)}$ $-\frac{1}{g'(-1{,}67)} \approx 1{,}6 \qquad -\frac{1}{g'(1{,}67)} \approx -1{,}6$ Die Anstiege der Tangenten und Normalen an den Schnittstellen stimmen nicht überein.	5	

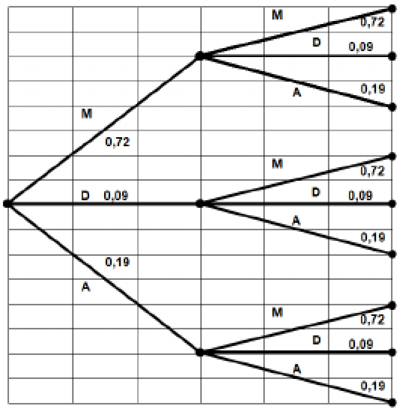
1.4.1	$g(x) = -\frac{9}{1280}x^4 + \frac{9}{40}x^2 - \frac{9}{5}$ $\qquad g''(x) = -\frac{27}{320}x^2 + \frac{9}{20}$ $g''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} \approx \pm\, 2{,}31$ Aus Symmetriegründen genügt die Betrachtung an einer Stelle. $g'(x) = -\frac{9}{320}x^3 + \frac{9}{20}x$ $\qquad g'(2{,}31) \approx 0{,}69$ $\tan(\alpha) = 0{,}69 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 34{,}7^\circ > 30^\circ$ Die Errichtung eines Zauns ist erforderlich.	4	
1.4.2	Länge der Kunststoffhaube Bogenlänge b: $b = \int_{-4}^{4} \sqrt{1 + [q'(x)]^2}\, dx \approx 9{,}18$ $A \approx 9{,}18 \cdot 5 = 45{,}9$ Die Abdeckung hat eine Fläche von $45{,}9\,m^2$.	4	
1.4.3	Tiefe des Beckens: $g(0) = -\frac{9}{5}$ Füllstandshöhe: $-\frac{6}{5}$ Schnittstellen mit dem Graph von g im Intervall $[-4, 4]$ $-\frac{6}{5} = g(x) \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} \approx \pm 1{,}71$ Derzeitiges Füllvolumen: $5 \cdot \int_{-1{,}71}^{1{,}71} \left(-\frac{6}{5} - g(x)\right) dx \approx 6{,}7$ Maximales Füllvolumen: $\left\vert 5 \cdot \int_{-4}^{4} (g(x))\, dx \right\vert \approx 38{,}4$ Mögliche Zuflussmenge: $38{,}4 - 6{,}7 = 31{,}7$ $31{,}7\,m^3 = 31\;700\;l$ 31 700 Liter Flüssigkeit können noch in dieses Becken fließen.	6	
	Summe:	**35**	

Aufgabe A2

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
2.1	grafische Darstellung  	3	
2.2	Koordinatengleichung $\vec{\eta}=\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CG}=\begin{pmatrix}0\\-11\,200\\-800\end{pmatrix}=-800\cdot\begin{pmatrix}0\\14\\1\end{pmatrix}$ $14y+z+d=0$ Koordinaten z. B. von D einsetzen $14\cdot 80+0+d=0 \qquad \Rightarrow d=-1120$ $14y+z-1120=0$	4	
	Nachweis das H in der Ebene liegt $14\cdot 70+140-1120=0$ w.A. Punkt H liegt in der Ebene.	2	
	Winkel Grundfläche ABCD liegt in der xy-Ebene $\Rightarrow \vec{\eta}_{xy}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Seitenfläche $\vec{\eta}=\begin{pmatrix}0\\14\\1\end{pmatrix}$ $\cos\alpha=\frac{\vec{\eta}_{xy}\circ\vec{\eta}}{\lvert\vec{\eta}_{xy}\rvert\cdot\lvert\vec{\eta}\rvert}=0{,}07125 \qquad \Rightarrow \alpha=85{,}9°$	4	
2.3	Verbindungsstrecke steht senkrecht auf Grund- und Deckfläche Mittelpunkt Grundfläche: $M_G(40 \mid 40 \mid 0)$ Mittelpunkt Deckfläche: $M_D(40 \mid 40 \mid 140)$	5	

	$\overline{M_GM_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 140 \end{pmatrix} \parallel \vec{\eta}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Grund- und Deckfläche sind parallel. Da alle Punkte der Grundfläche die z-Koordinate „0“ und alle Punkte der Deckfläche die z-Koordinate „140“ besitzen. $\Rightarrow \quad \overline{M_GM_D} \perp$ Grundfläche $\overline{M_GM_D} \perp$ Deckfläche Verbindungsstrecke ist Höhe		
2.4	Kosten Seitenfläche ist ein Trapez. Grundseite: a = 80 cm; Deckseite: c = 60 cm Höhe: $h_S = \sqrt{140^2 + 10^2} = 140{,}4\text{ cm}$ Flächeninhalt Trapez: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h_s = 9825{,}2\text{ cm}^2$ Flächeninhalt Blatt: $A = 90{,}25\text{ cm}^2$ $\Rightarrow \frac{9825{,}2\text{ cm}^2}{90{,}25\text{ cm}^2} \approx 108{,}9 \Rightarrow 109$ Blatt Blattsilber werden benötigt. $\Rightarrow 5$ Packungen $\Rightarrow$ Kosten von 100,75 €	8	
2.5	Gerade: $g_{RS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 70 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ Durchstoßpunkt g_{RS} mit der Ebene $14(5+17r) + (70+7r) - 1120 = 0 \qquad \Rightarrow r = 4$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 70 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 73 \\ 98 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow S(50 \mid 73 \mid 98)$	3	
	Winkel zwischen Degen und Seitenfläche $\cos\alpha' = \frac{\vec{v} \circ \vec{\eta}}{\lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{\eta}\rvert} = 0{,}91618 \qquad \Rightarrow \alpha' = 23{,}6°$ Winkel $\alpha = 90° - \alpha' = 66{,}4°$	3	
	Länge $\overline{RS}$ $\lvert\overline{RS}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 20 \\ 68 \\ 28 \end{pmatrix} \right\rvert = 76{,}2$ Da der Degen 90cm lang ist, sind von der Klinge noch etwa 13,8 cm außen zu sehen.	3	
	Summe:	**35**	

Aufgabe A3

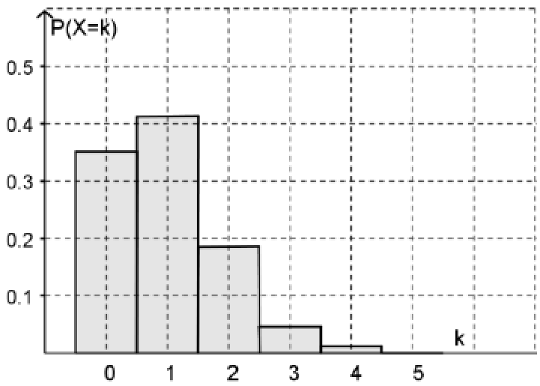
<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösungen</th><th>mögliche
BE</th><th>erteilte
BE</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Ein Baumdiagramm


Eine Ergebnismenge
$\Omega = \{MM, MD, MA, DM, DD, DA, AM, AD, AA\}$
Wahrscheinlichkeiten
$P(E1) = 0{,}72^2 \approx 0{,}518$
$P(E2) = (0{,}72 + 0{,}09) \cdot 0{,}19 + 0{,}19 \approx 0{,}344$</td><td>3

2

2
3</td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>X kann aus zwei Gründen als binomialverteilt angesehen werden.
Die 5 befragten Personen wurden aus einer sehr viel größeren Anzahl von Besuchern des Volksfestes ausgewählt, sodass die betrachtete Wahrscheinlichkeit durch die Auswahl nahezu unverändert bleibt.
Außerdem gab es bei dieser Befragung bei jeder einzelnen Person genau zwei mögliche Antworten.

Wahrscheinlichkeitsverteilung
<table>
<tr><td>k</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$P(X=k)$</td><td>0,349</td><td>0,409</td><td>0,192</td><td>0,045</td><td>0,005</td><td>0,000</td></tr>
</table>

Grafische Darstellung

</td><td>2

3

2</td><td></td></tr>
</table>

3.3	Ereignisse $E3 = \{OPPP, POPP, PPOP, PPPO\}$ $E4 = \{OOOO, POOO, OPOO, OOOP, PPOO, POOP, OPOP, PPOP\}$ Gegenereignis $\overline{E4}$: Die dritte Person fährt nicht mit öffentlichen Verkehrsmitteln.	2 2 1	
3.4.1	Wahrscheinlichkeiten $P(m / u30) = (1-0,49)\cdot(1-0,53) = 0,240$ $P(w / \text{nicht}\, u30) = 0,49 \cdot 0,53 = 0,260$	2 2	
3.4.2	Berechnung des Erwartungswertes $E = n \cdot p = 120 \cdot 0,06 = 7,2$ Es ist mit 7 Kindern zu rechnen. Wahrscheinlichkeiten $P(X=10) = B_{120;0,06}(10) \approx 0,078$ $P(2 \le X < 8) = F_{120;0,06}(7) - F_{120;0,06}(1) \approx 0,563$	2 2 2	
3.4.3	Systematisches Probieren mit $p = 0,06$ $n = 100 \quad P(2 \le X \le 100) \approx 0,9848$ $n = 50 \quad P(2 \le X \le 50) \approx 0,8100$ $n = 49 \quad P(2 \le X \le 49) \approx 0,8010$ $n = 48 \quad P(2 \le X \le 48) \approx 0,7915$ Es müssen mindestens 49 Personen befragt werden.	3	
	Summe:	**35**	