Komplexe Übung

Aufgabe1
Von einer Pyramide ABCDS ist folgendes bekannt:

- die Grundfläche ABCD ist ein Parallelogramm
- die Punkte $A(3;-1;-2), B(3;4;-2); C(-2;5;-2) und S(0;0;6)$ sind gegeben

Aufgaben:

- Bestimmen Sie den Punkt D.
- Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
- Stellen Sie ein Ebenengleichung auf in der B, C und S enthalten sind.
- Bestimmen Sie dem Winkel $\sphericalangle(BSC)$ und $\sphericalangle(ABC)$.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche BCS und der Grundfläche ABCD.
- A' teilt die Seitenkante AS im Verhältnis 1:2. Bestimmen Sie A' und zeichnen Sie A' ein.

Aufgabe 2
Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(8/0/0), B(0/6/0), C(−4/3/4) und D(0/0/4) gegeben.

Weisen Sie nach, dass alle vier Punkte in ein und derselben Ebene ε liegen.

Stellen Sie das Viereck ABCD in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

Durch den Punkt C verlaufe eine Gerade g parallel zur Geraden BD. Die Gerade g schneidet die Gerade durch A und D im Punkt C'.
Ergänzen Sie die grafische Darstellung durch Einzeichnen von g und C'.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C'.
Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes C" von g an.

Begründen Sie, dass das Dreieck ABC' den gleichen Flächeninhalt hat wie das Viereck ABCD.

Lösung zu 1.

- $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$ $\qquad \overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\qquad D(-2;0;-2)$

- Darstellung (verdeckte Kanten beachten)

- $E_{BCS}:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-4\\8\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{SB}=\begin{pmatrix}3\\4\\-8\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{SC}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-8\end{pmatrix}$ $\qquad \cos(\sphericalangle(BSC))=\dfrac{\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{SB}|\cdot|\overrightarrow{SC}|}\approx 0{,}85734995$

  $\sphericalangle(BSC)=30{,}98°$

  $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \cos(\sphericalangle(ABC))=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\approx -0{,}196116$

  $\sphericalangle(ABC)=101{,}3°$

- $A_{BCS}=0{,}5\cdot|\overrightarrow{SB}|\cdot|\overrightarrow{SC}|\cdot\sin(\sphericalangle(BSC))\approx 23{,}41$ FE

  $A_{ABCD}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\sin(\sphericalangle(ABC))\approx 25$ FE

- Veranschaulichung durch Skizze führt zum Ansatz:

  $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\1\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\qquad A'(2;-\frac{2}{3};\frac{2}{3})$

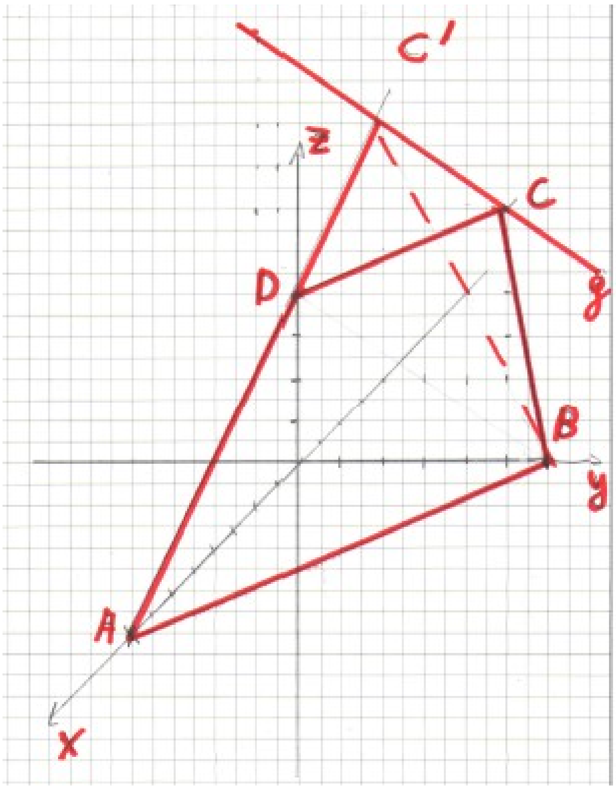
  in einer sauberen Darstellung kann das Ergebnis überprüft werden

Lösung zu 2.

- $E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ D einsetzen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

  ergibt: $s = 1$ und $r = -0{,}5$ d.h. alle vier Punkte liegen in einer Ebene

-



-
- $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $h_{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

  $g = h_{AD}$ ergibt: $s = 1{,}5$ und $r = 0{,}5$ $C'(-4; 0; 6)$

- einen weiteren Punkt für $r = -1$ einsetzen $C''(-4; 9; 0)$

-
- $\overrightarrow{DC'}=\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}$ $\cos(\sphericalangle(C'DB))=\frac{\overrightarrow{DC'}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DC'}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}=-\frac{2}{65}\cdot\sqrt{65}$

$A_{C'DB}=|\overrightarrow{DC'}|\cdot|\overrightarrow{DB}|\cdot\sin(\sphericalangle C'DB)=15{,}620499$ FE

$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}$ $\cos(\sphericalangle(BCD))=-\frac{7}{205}\cdot\sqrt{41}$

$A_{BCD}=15{,}620499$ FE

Da das Dreieck ABD in beiden Flächen enthalten ist, hat das Dreieck ABC' den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck ABCD

Nach Einführung des Kreuzproduktes kann man den Flächeninhalt auch hiermit berechnen.

z.B. $A_{C'DB}=0{,}5\cdot|\overrightarrow{DC'}\,x\,\overrightarrow{DB}|=0{,}5\cdot\left|\begin{pmatrix}-12\\-16\\-24\end{pmatrix}\right|=4\cdot\sqrt{64}\approx15{,}620499$