Aufgaben sind zum größten Teil ohne CAS zu lösen. Kontrolle mit CAS ist eine gute Übung

Analysis

Aufgabe 2
Bestimmen Sie jeweils die Gleichung einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion mit drei verschiedenen Nullstellen.
b) Die Funktion ist eine gebrochenrationale Funktion, deren Funktionswerte alle größer als 1 sind.
c) Die Funktion ist eine Exponentilfunktion mit $f(x) \rightarrow 2$ für $x \rightarrow \infty$.
d) Die Funktion f ist eine Wurzelfunktion, deren Steigung an der Stelle $x=1$ den Wert 2 hat.

Aufgabe 3
Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=x^2(x-1)\cdot(x-2)$

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $P(0;0)$ ein Tiefpunkt des Graphen ist.
b) Der Graph von f schließt mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie, wie groß der Inhalt des Flächenstücks ist, das oberhalb der x-Achse liegt.

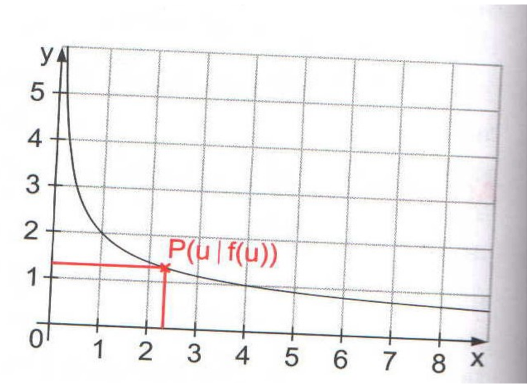
Aufgabe 4
Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist symmetrisch zur y-Achse, hat einen Hochpunkt $H(0;-1)$ und einen Tiefpunkt $T(1;-2)$.
Untersuchen Sie, was ohne Bestimmung des Funktionsterms über die Anzahl der Nullstellen, die Anzahl der Extrempunkte und die Anzahl der Wendepunkte von f gesagt werden kann, und fertigen Sie eine Skizze des Graphen G_f an.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:
Der Graph von f ist eine Parabel (vom Grad 2), die mit der x-Achse eine Fläche von 36 FE einschließt.

Aufgabe 6
Gegeben sind der Graph G_h der gebrochenrationalen Funktion $h(x)=\frac{4}{x^2}$ und der Punkt $B(2;h(2))$. Die Tangente t an G_h im Punkt B schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
a) Ermitteln Sie eine Gleichung, durch der die Tangente beschrieben werden kann.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 7

Gegeben ist für $x > 0$ die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Das eingezeichnete Rechteck rotiert um die x-Achse, wodurch ein Zylinder entsteht. Zeigen Sie, dass das Volumen des Zylinders unabhängig von u ist.



Aufgabe 8

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades
- der Graph von f besitzt einen Tiefpunkt $T(-2;-8)$ und einen Hochpunkt $H(0;0)$.

b) Skizzieren Sie ohne weitere Berechnung den Graphen G_f von f.

Analytische Geometrie

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $A(-1;3;-2), B(2;3;1)$, $C(3;-1;0)$ und $D(0;-1;3)$.

a) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Quadrates ABCD.

Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden zueinander parallelen Ebenen $E_1: 2x_1-2x_2+x_3=6$ und $E_2: 2x_1-2x_2+x_3=-6$ sowie die zu E_1 parallele Gerade g mit folgender Gleichung:

$$g: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \quad ; \quad r\in\mathbb{R}$$

a) Begründen Sie, dass die Gerade g in der Ebene E_2 liegt.

b) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g von der Ebene E_1 .

Aufgabe 3

Eine Pyramide hat die Grundfläche ABCD mit den Eckpunkten $A(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $C(4;4;0)$ und $D(0;4;0)$ sowie der Spitze $S(2;2;6)$.

Die Ebene E geht durch die Punkte C und D sowie durch den Mittelpunkt M der Kante [BS].

a) Ein Normalvektor $\vec{n}$ der Ebene E ist durch : $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Die Ebene schneidet die Kante [AS] im Punkt P. Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

b) Zeigen Sie, dass die Strecken [CD] und [MP] parallel zueinander sind.

Aufgabe 5

a) Der Punkt $A'(-3;-4;5)$ ist der Spiegelpunkt des Punktes $A(5;0;1)$ bezüglich der Ebene E. Leiten Sie eine Gleichung der Ebene E in koordinatenform her.

b) Ermitteln Sie den Abstand der beiden Punkte A und A' von der Ebene E.

Aufgabe 6

Gegeben sind die beiden Graden g und h mit den folgenden Gleichungen:

$$g: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad h: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\-4\end{pmatrix} \qquad r,s\in\mathbb{R}$$

a) Weisen Sie nach, dass die beiden Geraden g und h parallel zueinander sind.

b) Die beiden Geraden legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Parameterform. (in Koordinatenform CAS)

Stochastik

Aufgabe 1
Eine Urne enthält fünf schwarze, drei rote und zwei weiße Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden. Aus dieser Urne werden zwei Kugeln nacheinander mit Zurücklegen gezogen.
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben haben.

b) Bei einer bestimmten Durchführung des Zufallsexperiments haben die beiden gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben; (mindestens) eine der beiden gezogenen Kugeln ist rot. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die andere der beiden Kugeln schwarz ist

Aufgabe 4
Jan und Anna spielen mit einer 1-Euro-Münze. Die beiden werfen die Münze insgesamt maximal viermal, wobei sie sich nach jedem Wurf abwechseln. Derjenige, bei dessen Wurf die Münze zuerst die Wertseite „1 Euro“ zeigt, hat gewonnen.

- Anna lässt jan den Vortritt. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jan bzw. Anna gewinnt.
- Nach einiger Zeit variieren Anna und Jan die Spielregeln leicht. Sie wechseln sich nun nicht nach jedem Wurf ab, sondern werfen in der Reihenfolge Anna-Jan-Jan-Anna. Sonst bleibt alles beim Alten. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jan bzw. Anna gewinnt.