

Aufgabe 1

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{21}$ LE folgt, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.

Gesucht ist β .

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \quad \beta = 121,59^\circ$$

Mittelpunkt der Seite AC ist $M_{AC}(4; 2; 4)$

$$\text{Symmetrieachse } s = g_{BM_{AC}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ABC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung: $-8y + 16z - 48 = 0$ bzw. $y - 2z + 6 = 0$

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2,2 \\ -1,1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4,2 \\ -2,1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2,2 \\ -1,1 \end{pmatrix}$$

es gilt: $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}| = r = \frac{21}{10}\sqrt{5}$ also M ist Mittelpunkt des Kreises

$$\text{Flächeninhalt: } A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} \right| = 4 \cdot \sqrt{5} \approx 8,9 FE$$

Aufgabe 2

2.1

$$\text{Flugbahn 1} \quad g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Flugbahn 2} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -14 \\ 46 \\ 32 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Darstellung:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 100 \quad ; \quad |\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -14 \\ 96 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \sqrt{2389} \approx 97,75 \quad ;$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \sqrt{89} \approx 18,87$$

1. Lösungsweg mit Pythagoras

$$|\overrightarrow{AB}|^2 \neq |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 \quad \text{d.h., das Dreieck ist nicht rechtwinklig.}$$

2. Lösungsweg Skalarprodukt der "Katheten"

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 196 - 384 + 144 = -44 \neq 0 \quad \text{d.h., das Dreieck ist nicht rechtwinklig.}$$

2.2

$z=0$ ergibt: $0=32-s$ $s=32$ in g_2 einsetzen, also $D(50;-18;0)$

$$l_{\text{Landeflug}} = |\overrightarrow{CD}| = \left| \begin{pmatrix} 64 \\ -64 \\ -32 \end{pmatrix} \right| = 96 \text{ km}$$

Auftreffwinkel: Normalenvektor der x-y-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Flugvektor: } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\sin \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} \text{ ergibt den Auftreffwinkel } \alpha = 41.8^\circ$$

2.3

$$g_1 = g_2: \begin{pmatrix} 0 = -14 + 2s \\ -50 + 100r = 46 - 2s \\ 20 = 32 - s \end{pmatrix} \text{ 1. Zeile } s = 7 \text{ und 3. Zeile } s = 12 \text{ Widerspruch}$$

Geraden sind parallel oder windschief. Ergebnis: kein Zusammenstoß
(Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also windschief)

2.4

$$M(18; 14; 16)$$

$$g_{ME}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = g_{ME}: \begin{pmatrix} 0 = 18 - 18t \\ -50 + 100r = 14 + 11t \\ 20 = 16 + 4t \end{pmatrix} \text{ hat die Lösung } t = 1 \text{ und } r = \frac{3}{4}$$

Zusammenstoß im Punkt $(0; 25; 20)$ möglich. (wenn sie zum gleichen Zeitpunkt dort sind)

$$\text{Neue Fluglänge von M zu D: } |\overrightarrow{ME}| + |\overrightarrow{ED}| = \left| \begin{pmatrix} -18 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 50 \\ -43 \\ -20 \end{pmatrix} \right| = 90,4 \text{ km} \quad (90,384)$$

$$\text{Umweg: } 90,4 \text{ km} - 48 \text{ km} = 42,4 \text{ km} \quad (48 \text{ km ist die ursprüngliche Entfernung M-D)}$$

2.5

$$\text{Ansatz: } \overrightarrow{0H} = \overrightarrow{0E} + \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 125 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von $H(0; 125; 120)$

$$\text{Flächeninhalt: } A = |\overrightarrow{FE} \times \overrightarrow{FG}| = \left| \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \right| = 14142,1 \text{ km}^2$$