Aufgabe 1 Testfahrt

-

Eine Funktion f ist für $x \in IR$ definiert durch: $f(x) = -(4x+80) \cdot e^{-\frac{1}{20}x} + 80$.

a) Berechnen Sie die Nullstelle von f und untersuchen Sie den Graphen von f auf relative Extrempunkte und deren Art.
Der Graph von f besitzt genau einen Wendepunkt. Ermitteln Sie diesen nur mithilfe des notwendigen Kriteriums. Geben Sie $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ an und zeichnen Sie den Graphen von f für $-10 < x < 150$ einschließlich seiner waagerechten Asymptote in das vorgegebene Koordinatensystem 1 ein.

b) Ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten besitzt die beiden Eckpunkte $D(0\,|\,80)$ und $B(x\,|\,f(x))$. Es existiert ein Punkt B mit $x > 0$, so dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird. Bestimmen Sie die Koordinaten für diesen Punkt B.

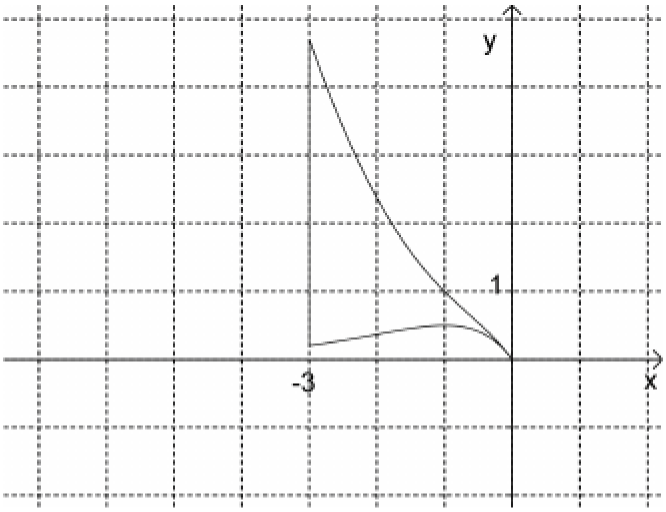
Ein Schienenfahrzeug fährt aus dem Stand an. Die zunehmende Geschwindigkeit des Schienenfahrzeugs wird für $x \geq 0$ durch $f(x) = -(4x+80) \cdot e^{-\frac{1}{20}x} + 80$ dargestellt.
Dabei wird die Zeit x in Sekunden und die Geschwindigkeit $v = f(x)$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ gemessen.

c) Die erste Ableitung von $v = f(x)$ ist die Beschleunigung a des Fahrzeugs: $a = f'(x)$.
Geben Sie nur mithilfe des notwendigen Kriteriums den Zeitpunkt x_{max} an, für den die Beschleunigung maximal wird und zeichnen Sie den Graphen von f' für $0 \leq x \leq 40$ in das Koordinatensystem 2 ein.
Bei einer anderen Testfahrt wird die Beschleunigung zum Zeitpunkt $x = 40$ so geändert, dass sie nunmehr linear abnimmt und sich der Graph der linearen Funktion g tangential an den Graphen von f' anschließt.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $g(x)$ dieser linearen Funktion und berechnen Sie den Zeitpunkt x_0, zu dem die Beschleunigung $g(x)$ auf null abgenommen hat.
Ergänzen Sie Ihre graphische Darstellung der Beschleunigung um den linearen Anteil.
[Kontrollergebnis: $g(x) = -0{,}2e^{-2} \cdot x + 16e^{-2}$]

d) Der Inhalt der Fläche über dem Intervall $[\,0\,;80\,]$ zwischen der x-Achse und den bei $x = 40$ zusammen gefügten beiden Graphen von f' und g entspricht der zum Zeitpunkt $x_0 = 80$ erreichten Endgeschwindigkeit.
Berechnen Sie diesen Flächeninhalt und geben Sie die bei der Testfahrt nach 80 Sekunden erreichte Endgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

e) Die Geschwindigkeit $f(x)$ des Fahrzeugs ist gleich der ersten Ableitung der Funktion s, die den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit x angibt: $f(x) = s'(x)$.
Zum Zeitpunkt $x = 0$ beginnt das Fahrzeug seine Fahrt an der Wegmarkierung 0 m.
Bestimmen Sie die Stammfunktion s von f so, dass $s(0) = 0$ erfüllt wird.
Berechnen Sie die Länge der zurückgelegten Strecke bis zum Zeitpunkt $x = 40$.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die bis dahin erreicht wird.

Anlage zu Aufgabe 1.2 CAS: Lenkdrachen



Aufgabe 2

B2 Analysis und Analytische Geometrie

2.1 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -4\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$ mit $x \in D_f$.

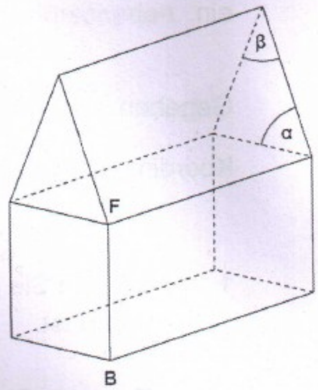
Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f und geben Sie die Nullstellen an.
Weisen Sie nach, dass der Graph von f keine lokalen Extrempunkte hat.
Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.
Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

2.2 Ein Quader ABCDEFGH mit aufgesetztem dreiseitigem Prisma (s. Skizze) wird als Modell für ein Haus mit Satteldach verwendet. An dem Modell werden unterschiedliche Neigungen der Dachfläche untersucht. In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Grundfläche ABCD mit den Eckpunkten $A(2 \mid 5 \mid 0)$, $B(10 \mid 11 \mid 0)$, $C(-14 \mid 43 \mid 0)$ und $D(-22 \mid 37 \mid 0)$ gegeben.
Die Dachflächen liegen jeweils in Ebenen der Ebenenscharen mit den Gleichungen:

$\varepsilon_t: \quad 8t \cdot x + 6t \cdot y + 50z - 146t - 375 = 0$

$\delta_t: \quad 8t \cdot x + 6t \cdot y - 50z - 46t + 375 = 0$

mit $t > 0$.



2.2.1 Der Punkt F gehört zu den Ebenen der Ebenenschar ε_t.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes F vom Punkt B.

2.2.2 Berechnen Sie denjenigen Wert für t, bei dem der Winkel β zwischen den beiden Dachebenen 90° beträgt (siehe Skizze).

2.2.3 Der Winkel α ist der Neigungswinkel einer Dachfläche (siehe Skizze).
Eine Untersuchung hat ergeben, dass Winkelgrößen für α zwischen 22° und 62° günstig sind.
Berechnen Sie die dafür möglichen Parameterwerte t.

Aufgabe 3

B1 Analysis

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Dreieck ABC mit den Punkten $A(0 \mid 0)$, $B(4 \mid 0)$ und $C(0 \mid 6)$ gegeben. Die Dreiecksfläche wird mit A_D bezeichnet.

Die axialsymmetrische Parabel zweiten Grades, die durch die Punkte B und C verläuft, schließt mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten die Fläche A_U ein.

Gegeben ist weiterhin die Parabel H mit $h(x) = -\frac{3}{16}x^2 + 3;\ x \in \mathbb{R}$, welche mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten die Fläche A_E einschließt.

1.1 - Weisen Sie nach, dass die Gerade durch die Punkte B und C eine Tangente von H ist.

Ermitteln Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $A_E : A_D : A_U$.

A_E und A_D rotieren um die Abszissenachse.
Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumina der Rotationskörper $V_E : V_D$.

1.2 Gegeben ist eine Schar von Funktionen durch die Gleichung $g_k(x) = a_k \cdot x^k + 6$ und $a_k < 0,\ x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^+$. Ihre Graphen heißen G_k.

1.2.1 Ermitteln Sie mithilfe der ersten Ableitung, für welche k der Graph G_k durch die Punkte B, C und $D(-4 \mid 0)$ verlaufen kann.

Ermitteln Sie für jedes k jeweils a_k so, dass der Graph durch den Punkt B verläuft.

1.2.2 Für die Funktion j gilt $j(k) = \int_{-4}^{4} \left(\frac{-6}{4^k} \cdot x^k + 6 \right) dx$ mit $k = \{2; 4; 6; 8; 10; \ldots\}$.

Stellen Sie die ersten fünf Wertepaare von j graphisch dar.

Beschreiben Sie die Veränderung der Form der Fläche, deren Größe durch die Funktion j erfasst wird.

B3 Stochastik

Abhängig von der Zusammensetzung der Eiweiße des Blutes unterscheidet man beim Menschen 4 Blutgruppen; A, B, AB und 0. Zusätzlich ist es noch wichtig, das Vorhandensein des sogenannten Rhesusfaktors zu kennen. Daraus ergeben sich verschiedene Kombinationen. Dabei bedeutet z. B. die Angabe A+ die Blutgruppe A mit Rhesusfaktor positiv.
Die Kenntnis der Blutgruppe ist bei einer Transfusion von größter Wichtigkeit, da Blut unterschiedlicher Blutgruppen gegebenenfalls verklumpt. Vor der Entdeckung der Blutgruppen waren Blutübertragungen nur zufällig erfolgreich und endeten oft tödlich.
Für die gesamte Aufgabe gilt: Ein Spender kann einem Empfänger Blut spenden, bedeutet, die Spende ist für den Empfänger verträglich.
Alle weiteren Angaben entnehmen Sie den nachfolgenden Grafiken.

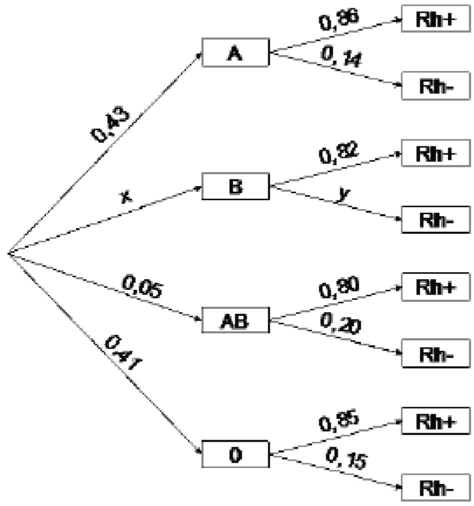


Abbildung 1: Blutgruppenverteilung in Deutschland

		Spender							
		0-	0+	B-	B+	A-	A+	AB-	AB+
Empfänger	AB+	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
	AB-	☺	☠	☺	☠	☺	☠	☺	☠
	A+	☺	☺	☠	☠	☺	☺	☠	☠
	A-	☺	☠	☠	☠	☺	☠	☠	☠
	B+	☺	☺	☺	☺	☠	☠	☠	☠
	B-	☺	☠	☺	☠	☠	☠	☠	☠
	0+	☺	☺	☠	☠	☠	☠	☠	☠
	0-	☺	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠

Tabelle 1: Verträglichkeit der Blutgruppen
☺ bedeutet, dass eine Blutübertragung möglich ist

3.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für x und y aus der Abbildung 1.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
- A: Eine zufällig ausgewählte Person hat die Blutgruppe A+.
- B: Eine zufällig ausgewählte Person hat den Rhesusfaktor (Rh+).
- C: Eine zufällig ausgewählte Person kann von jedermann eine verträgliche Bluttransfusion erhalten.

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mit der Blutgruppe A+ von einer zufällig ausgewählten Person eine Blutspende erhalten kann.

3.3 In Deutschland tritt die Blutgruppe AB- mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 auf. 1000 zufällig ausgewählte Personen werden getestet, ob sie diese Blutgruppe besitzen.

3.3.1 Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment als Bernoulli-Experiment betrachtet werden darf.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Genau 10 Personen besitzen die Blutgruppe AB-.
B: Mehr als 20 Personen besitzen diese Blutgruppe.

3.3.2 Der Blutspendedienst des DRK hat bei einer Spendenaktion festgestellt, dass von insgesamt 2010 Blutspenden 25 Spenden der Blutgruppe AB- sind.

Weisen Sie nach, dass man deshalb mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % nicht davon ausgehen darf, dass der Anteil von Spendern mit der Blutgruppe AB- ungewöhnlich hoch ist.

Berechnen Sie, wie viele Blutspenden der Blutgruppe AB- mindestens unter diesen 2010 Spenden sein müssten, damit man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % davon ausgehen darf, dass der Anteil von Spendern mit der Blutgruppe AB- ungewöhnlich hoch ist.