Aufgabe 1

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$

aus $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{21}$ LE folgt, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

Gesucht ist β .

$\cos(\beta)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$ $\beta=121{,}59°$

Mittelpunkt der Seite AC ist $M_{AC}(4;2;4)$

Symmetrieachse $s=g_{BM_{AC}}:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$E_{ABC}:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-8\\16\end{pmatrix}$

Koordinatengleichung: $-8y+16z-48=0$ bzw. $y-2z+6=0$

$\overrightarrow{MA}=\begin{pmatrix}-4\\-2{,}2\\-1{,}1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}0\\-4{,}2\\-2{,}1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MC}=\begin{pmatrix}4\\-2{,}2\\-1{,}1\end{pmatrix}$

es gilt: $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|=r=\frac{21}{10}\sqrt{5}$ also M ist Mittelpunkt des Kreises

Flächeninhalt: $A=\frac{1}{2}\cdot|\vec{n}|=\left|\begin{pmatrix}0\\-8\\16\end{pmatrix}\right|=4\cdot\sqrt{5}\approx 8{,}9\,FE$

Aufgabe 2

2.1

Flugbahn 1 $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$

Flugbahn 2 $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -14 \\ 46 \\ 32 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Darstellung:

$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 100$; $|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -14 \\ 96 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \sqrt{2389} \approx 97{,}75$;

$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \sqrt{89} \approx 18{,}87$

1. Lösungsweg mit Pythagoras

$|\overrightarrow{AB}|^2 \neq |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$ d.h., das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

2. Lösungsweg Skalarprodukt der “Katheten“

$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 196 - 384 + 144 = -44 \neq 0$ d.h. , das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

2.2

$z=0$ ergibt: $0=32-s$ $s=32$ in g_2 einsetzen , also $D(50;-18;0)$

$$l_{Landeflug}=|\overrightarrow{CD}|=\left|\begin{pmatrix}64\\-64\\-32\end{pmatrix}\right|=96 \text{ km}$$

Auftreffwinkel: Normalenvector der x-y-Ebene: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Flugvektor : $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\sin\alpha=\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}$ ergibt den Auftreffwinkel $\alpha=41.8$ °

2.3

$g_1=g_2:\begin{pmatrix}0=-14+2s\\-50+100r=46-2s\\20=32-s\end{pmatrix}$ 1. Zeile s = 7 und 3. Zeile s = 12 Widerspruch

Geraden sind parallel oder windschief. Ergebnis : kein Zusammenstoß
(Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also windschief)

2.4

$M(18;14;16)$

$$g_{ME}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = g_{ME}: \begin{pmatrix} 0 = 18 - 18t \\ -50 + 100r = 14 + 11t \\ 20 = 16 + 4t \end{pmatrix}$$ hat die Lösung t = 1 und $r = \frac{3}{4}$

Zusammenstoß im Punkt $(0;25;20)$ möglich. (wenn sie zum gleichen Zeitpunkt dort sind)

Neue Fluglänge von M zu D: $|\overrightarrow{ME}| + |\overrightarrow{ED}| = \left|\begin{pmatrix} -18 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 50 \\ -43 \\ -20 \end{pmatrix}\right| = 90{,}4$ km (90,384)

Umweg: $90{,}4\,km - 48\,km = 42{,}4\,km$ (48km ist die ursprüngliche Entfernung M-D)

2.5

Ansatz: $\overrightarrow{0H} = \overrightarrow{0E} + \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 125 \\ 120 \end{pmatrix}$

Koordinaten von $H(0;125;120)$

Flächeninhalt: $A = |\overrightarrow{FE} \, x \, \overrightarrow{FG}| = \left|\begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}\right| = 14142{,}1\,km^2$