A1 Analytische Geometrie

2 Gegeben sind die Punkte A(5 | – 2 | 1), B(3 | 4 | – 2), C(– 2 | 2 | 0), S(2|2|5) und die Gerade g durch die Gleichung

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\6{,}8\\3{,}2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-5\\4{,}8\\-1{,}8\end{pmatrix};t\in R$$

.

2.1.1 Bestimmen Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E (Koordinatengleichung), die die Punkte A, B und C enthält.

(zur Kontrolle: z. B. $6x+19y+34z-26=0$)

2.1.2 Weisen Sie nach, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft.
Begründen Sie, dass der Punkt S auf der Geraden g liegt.
Berechnen Sie den Abstand der Geraden g zur Ebene E.

2.1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes auf der Geraden g, der von den Punkten A und B denselben Abstand hat.

2.2 Die Punkte A, B, C und S sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

2.2.1 Stellen Sie die Pyramide und die Gerade g in einem Koordinatensystem grafisch dar.

2.2.2 Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.

2.2.3 Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Seitenkante AS gegenüber der Fläche ABC.

2.2.4 Eine Ebene enthält die Gerade g und den Punkt A. Diese Ebene teilt das Dreieck ABC in zwei Teilflächen. Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte dieser Teilflächen.

2.1.1

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-7\\4\\-1\end{pmatrix} \qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}-7\\4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\19\\34\end{pmatrix}$$

$(\vec{x}-\vec{x_0})\cdot\vec{n}=0$ und $\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\19\\34\end{pmatrix}=26$

Ebenengleichung: $6x+19y+34z-26=0$

2.1.2

$g||E$, wenn der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor senkrecht aufeinander stehen

$\begin{pmatrix}-5\\4{,}8\\-1{,}8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\19\\34\end{pmatrix}=0$ (Bedingung erfüllt)

und $g\notin E$ Punktprobe: $6\cdot(-3)+19\cdot 6{,}8+34\cdot 3{,}2-26=194\neq 0$ (Bedingung erfüllt)

g und E sind parallel

Punktprobe: $\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6{,}8\\3{,}2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\4{,}8\\-1{,}8\end{pmatrix}$ ergibt: $r=-1$ d.h. $S\in g$

$$d(g,E)=\frac{6\cdot(-3)+19\cdot 6{,}8+34\cdot 3{,}2-26}{|\vec{n}|}=4{,}92 \text{ LE}$$

2.1.3

es muss gelten: $|\overline{PA}|=|\overline{PB}|$

Ansatz: $\left|\begin{pmatrix}5-(-3-5t)\\-2-(6{,}8+4{,}8t)\\1-(3{,}2-1{,}8t)\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}3-(-3-5t)\\4-(6{,}8+4{,}8t)\\-2-(3{,}2-1{,}8t)\end{pmatrix}\right|$

ergibt: $t=-0{,}85294$ und der gesuchte Punkt ist $P(1{,}2647;2{,}705;4{,}735)$

$P(1{,}3;2{,}7;4{,}7)$ (t in g einsetzen)

2.2

Zeichnung selbständig

2.2.2

$$V=\frac{1}{3}\cdot A_G\cdot h \quad \text{mit} \quad A_G=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}|=19{,}70406 \quad \text{FE und} \quad h=4{,}92 \quad \text{LE}$$

Ergebnisse aus 2.1.1 und 2.1.2 nutzen

$$V=\frac{97}{3}\approx 32{,}3 \quad \text{VE}$$

2.2.3

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}6\\19\\34\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix} \qquad \sin(\alpha)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AS}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AS}|}$$

$$\alpha\approx 50{,}247949\,°$$

2.2.4

Die Schnittgerade der Ebene geht durch A, ist parallelzu g und schneidet die Seite des Dreiecks ABC in D. (D bestimmen und dann die Teilverhältnisse)

h geht durch A und ist parallel zu g: $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\4{,}8\\-1{,}8\end{pmatrix}$

$$i_{BC}:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$h=i_{BC}$ ergibt $r=1$ und $s=0{,}6$

$$D(0\,;2{,}8\,;-0{,}8)$$

Flächenberechnung: $A_{ABD}=0.5*|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AD}|=11{,}822436$ FE

$A_{ADC}=0.5*|\overrightarrow{AD}\,x\,\overrightarrow{AC}|=7{,}8816242$ FE

Verhätnis: $\frac{A_{ABD}}{A_{ADC}}=1{,}5=\frac{3}{2}$

Veranschaulichung und Berechnung selbständig durchführen.

Lösung zur Aufgabe 2

1.

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$A(0 \mid 5) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 5$

$B(5 \mid 2) \quad \Rightarrow \quad f(5) = 2$

$C(7 \mid 1{,}4) \quad \Rightarrow \quad f(7) = 1{,}4$

$D(10 \mid 3) \quad \Rightarrow \quad f(10) = 3$

$E(13 \mid 1{,}8) \quad \Rightarrow \quad f(13) = 1{,}8$

$a = -0{,}00405,\ b = 0{,}101,\ c = -0{,}733,\ d = 1{,}04,\ e = 5$

$f(x) = -0{,}004x^4 + 0{,}1x^3 - 0{,}73x^2 + 1{,}04x + 5$

2.

$f(x) = -0{,}004x^4 + 0{,}1x^3 - 0{,}72x^2 + x + 5$

Ableitungen

$f'(x) = -0{,}016x^3 + 0{,}3x^2 - 1{,}44x + 1$

$f''(x) = -0{,}048x^2 + 0{,}6x - 1{,}44$

$f'''(x) = -0{,}096x^2 + 0{,}6$

Extrema

Notw. Bedingung: $f'(x_E) = 0$

$x_{E1} = 0{,}83,\ x_{E2} = 6{,}68,\ x_{E3} = 11{,}23$

Hinr. Bedingung: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(x_{E1}) = -0{,}97 < 0 \Rightarrow HP; \qquad f''(x_{E2}) = 0{,}43 > 0 \Rightarrow TP;$

$f''(x_{E3}) = -0{,}76 > 0 \Rightarrow HP$

Funktionswerte

$f(x_{E1}) = 5{,}39,\ f(x_{E2}) = 1{,}4,\ f(x_{E3}) = 3{,}44$

$H_1(0{,}8 \mid 5{,}4),\ T(6{,}7 \mid 1{,}4),\ H_2(11{,}2 \mid 3{,}4)$

Wendepunkte

Notw. Bedingung: $f''(x_W) = 0$

$x_{W1} = 3{,}24,\ x_{W2} = 9{,}26,$

Hinr. Bedingung: $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(x_{W1}) = 0{,}29 \neq 0 \Rightarrow WP; \qquad f'''(x_{W2}) = -0{,}29 \neq 0 \Rightarrow WP$

Funktionswerte

$f(x_{W1}) = 3{,}64,\ f(x_{W2}) = 2{,}51$

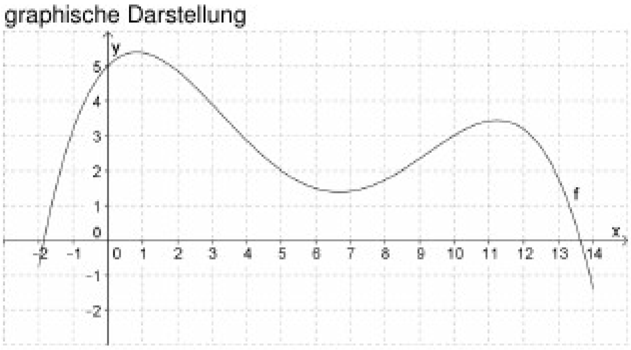
$W_1(3{,}2 \mid 3{,}6), W_2(9{,}3 \mid 2{,}5)$

Nullstellen

$f(x) = 0$

$x_{01} = -1{,}9 \quad \text{und} \quad x_{02} = 13{,}6$

graphische Darstellung



3.

Wind aus NordOst $\Rightarrow$ Anstieg m = 1

$\Rightarrow$ Anstieg der Küstenlinie m = -1

$f'(x) = -1$

$x_1 = 2{,}6$, $x_2 = 3{,}9$, $x_3 = 12{,}2$

Funktionswerte

$f(x_1) = 4{,}29$, $f(x_2) = 2{,}94$, $f(x_3) = 2{,}98$

$S_1(2{,}6 \mid 4{,}3)$, $S_2(3{,}9 \mid 2{,}9)$ und $S_3(12{,}2 \mid 3{,}0)$

Gerade durch den Punkt $T(10 \mid 6)$

$y = x - 4$

Gerade und Funktionsgleichung der Küstenlinie gleichsetzen

$f(x) = x - 4$

$x_1 = \cancel{-2{,}93}$ (entfällt), $x_2 = 5{,}63$

$L(5{,}6 \mid 1{,}6)$

4.

Gerade g durch $P(2 \mid 4{,}86)$ und $D(10 \mid 3)$

$g(x) = -0{,}23x + 5{,}32$

Fläche $\int_2^{10} g(x) - f(x)\,dx = 11{,}88$

Die Fläche beträgt rund 11,9 km^2.

Länge der Küstenlinie

Bogenlänge b: $b = \int_2^{10} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 9{,}71$

Die Küstenlinie hat eine Länge von rund 9,7 km.

4 km Küstenlinie von P aus

Bogenlänge b: $b = \int_2^{k} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 4 \qquad \Rightarrow \qquad k = 4{,}88$

neuer Punkt $Q(4{,}88 \mid 2{,}09)$