Teil1 ohne Hilfsmittel ca. 45‘

1.

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(2 \mid 25)$.

Geben Sie den Anstieg der Normalen an den Graphen von f im Punkt P an.

2.

Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters c auf den Verlauf der Graphen der Schar $g_c(x) = 2^x + c$ mit $c, x \in \mathbb{R}$.

3.

Gegeben ist die Gleichung $\int_0^1 (6x^5 - 6x^2 + k)\,dx = 3$ mit $x, k \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Wert von k, sodass die Gleichung erfüllt ist.

4.

Gegeben sind die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ sowie die Punkte $A(1 \mid -3 \mid 5)$ und $B(5 \mid 4 \mid -1)$.

Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke AB an.

Prüfen Sie, ob die Gerade g und die Strecke AB senkrecht zueinander verlaufen.

Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die durch den Punkt A verläuft und keinen Punkt mit der xy-Ebene gemeinsam hat.

5.

In einer Urne befinden sich 3 rote, 5 schwarze und 2 gelbe Kugeln.

Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau eine schwarze Kugel gezogen wird.

Teil 2 mit Hilfsmitteln

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + a^2 \quad a \in R, a \neq 0$ und die Funktion g mit $g(x) = 2x^2 - 2$. Die Graphen der Schar von f_a sind G_a und der Graph von g ist K.

a) Weise Sie nach, dass alle Graphen G_a achsensymmetrisch zur y-Achse verlaufen.
Ermitteln Sie die koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit den beiden Koordinatenachsen

b) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a. Für jeden Parameter a mit $a > 0$ sind die drei lokalen Extrempunkte Eckpunkte eines Dreiecks. Wenn der Parameterwert a verdoppelt wird, vervielfacht sich der Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks A. Das neue Dreieck hat den Flächeninhalt . $A_{neu} = v \cdot A$. Ermitteln Sie den Faktor v.

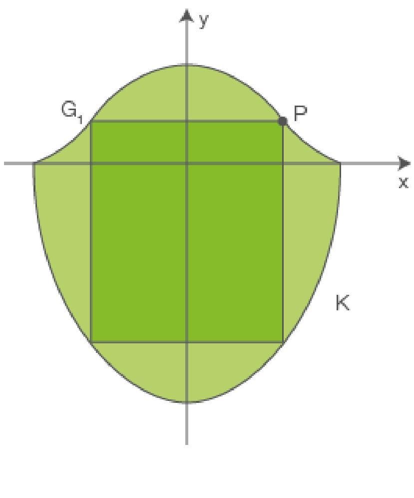
c) Die Graphen G_1 und K schließen im Intervall $[-1;1]$ eine Fläche ein, die als Schablone für das Wappen einer Stadt genutzt werden soll. Berechne Sie den zugehörigen Flächeninhalt.

d) Der Punkt P liegt im I. Quadranten auf G_1. P ist Eckpunkt eines Rechtecks, dessen Seiten achsenparallel verlaufen und dessen weitere Eckpunkte auf den Begrenzungslinien des Wappens liegen. Innerhalb dieses Rechtecks soll das Wappentier abgebildet werden. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks mit der Gleichung $A(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$ berechnet werden kann. Ermitteln den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks.

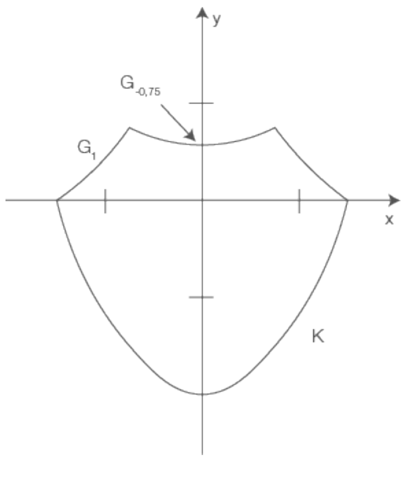
e) Für eine andere Gestaltung des symmetrischen Stadtwappens wird vorgeschlagen, neben dem Graphen G_1 zusätzlich zu den Graphen $G_{-0,75}$ zur Modellierung des oberen Randes zu nutzen.
Ermitteln Sie um wie viel Prozent sich die ursprüngliche Fläche des Wappens dadurch verringern lässt.

g) Die untere Begrenzung des Stadtwappens soll statt durch die quadratische Parabel K mithilfe einer anderen quadratischen Parabel modelliert werden. Dabei sollen die Symmetrie des Wappens sowie die Schnittpunkte $S_1(-1|0)$ und $S_2(1|0)$ mit G_1 zwar erhalten bleiben, sich aber die Fläche des Wappens um $2\ FE$ gegenüber des in c) beschriebenen Wappens vergrößern.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der neuen Parabel.

zu c)



zu e)



Lösungen 1.Teil

1.

$f'(x)=12x^2-4x \qquad m_T=f'(2)=40 \qquad 25=40\cdot 2+n \qquad n=-55$

Tangentengleichung: $y_T=40\cdot x-55$

Anstieg der Normalen $m_N=-\frac{1}{40}$ Normalengleichung: $y_N=-\frac{1}{40}+25{,}05$

2.

c verschiebt den Graphen 2^x um x-Einheiten in y-Richtung

3.

Ansatz: $\left|x^6-2x^3+k\cdot x\right|_0^1=1-2+k$

$k-1=3$ Ergebnis: $k=4$

4.

$M(3;0{,}5;2) \qquad \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\7\\-6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4\\7\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=4+14-18=0$ g und die Strecke AB verlaufen senkrecht zueinander

Gleichung z.b.: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

5.

$P(genau\,eine\,schwarze\,Kugel)=2\cdot P(r,s)+2\cdot(g,s)=2\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}+2\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

Lösungen 2. Teil

a) $f_a(x)=f_a(-x)$ d.h. Achsensymmetrie

Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0;a^2)$

für $a>0$ gibt es zwei Berührungspunkte siehe b)

$S_{x1}(-\sqrt{a};0)$ $S_{x2}(\sqrt{x};0)$

b)

1.Fall

$f'(x)=0 \quad a>0$

$x_{E1}=-\sqrt{a} \quad f''(x_{E1})=8\cdot a>0$ d.h. $MIN(-\sqrt{a};0)$

$x_{E2}=0 \quad f''(0)=-4\cdot a<0$ d.h. $MAX(0;a^2)$

$x_{E3}=\sqrt{a} \quad f''(x_{E3})=8\cdot a>0$ d.h. $MIN(\sqrt{a};0)$

2.Fall nicht gefragt

$f'(x)=0 \quad a<0$

$x_E=0 \quad f''(0)=-4\cdot a>0$ d.h. $MIN(0;a^2)$

$A=\frac{1}{2}\cdot 2*\sqrt{a}\cdot a^2=\sqrt{a}\cdot a^2 \qquad A_{neu}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2\cdot a}\cdot(2\cdot a)^2=\sqrt{2}\cdot 4\cdot\sqrt{a}\cdot a^2$

Der Faktor ist $v=\sqrt{2}\cdot 4$

c)

$A_1=\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx=\frac{16}{15}FE \qquad A_2=-\int_{-1}^{1}(2\cdot x^2-2)\,dx=\frac{8}{3}$

Flächeninhalt: $\frac{56}{15}\approx 3{,}73$

d)

$A_{Rechteck}=a\cdot b=2\cdot x\cdot(f_1(x)-g(x))=2\cdot x\cdot(x^4-2\cdot x^2+1-2x^2+2)=2\cdot x^5-8\cdot x^2+6\cdot x$

w.z.z.w.

$A'_{Rechteck}(x)=0$ ergibt : $x_{E1}\approx -1{,}45$, $x_{E2}\approx -0{,}532$, $x_{E3}\approx 0{,}532$,

$x_{E4}\approx 1{,}45$

$x_{E1}\, und\, x_{E4}$ entfallen Bereich -1 1

$A''(x_{E3})=-19{,}5<0 \qquad MAX(0{,}53;2{,}07)$

Bei x = 0,53 ist der Flächeninhalt mit etw 2,07 FE maximal.

e)

$f_1 = f_{-0,75}$ ergibt $x_1 = -0,354$ $x_2 = 0,354$

eingesparte Fläche: $A_{spar} = \int_{-0,354}^{0,354} (f_1 - f_{-0,75})\,dx \approx 0,2$

$\frac{0,2}{3,73} \approx 0,0536$ etwa 5,4% werden eingespart

f)

neuer Flächeninhalt der Parabel $\frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$

$g_{neu}(x) = a \cdot x^2 - b$

mit $g_{neu}(1) = 0$ und $\frac{14}{3} = -\int_{-1}^{1} g_{neu}(x)\,dx$

ergibt $a = \frac{7}{2}$ *und* $b = \frac{7}{2}$ $g_{neu} = \frac{7}{2} x^2 - \frac{7}{2}$

Ergebnisse mit CAS veranschaulichen