Aufgabe 1 Am See Grundfach

Gegeben sind die Funktionen *f* und *g* durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ und den Graphen von g in der Anlage.
Die Graphen von *f* und *g* begrenzen für $1 \leq x \leq 3$ einen See. Der Graph von *f* bildet modellhaft die nördliche und die zu *g* gehörende quadratische Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.

Die *x*-Achse verläuft in West-Ost-Richtung. Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von *g*.
[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.]

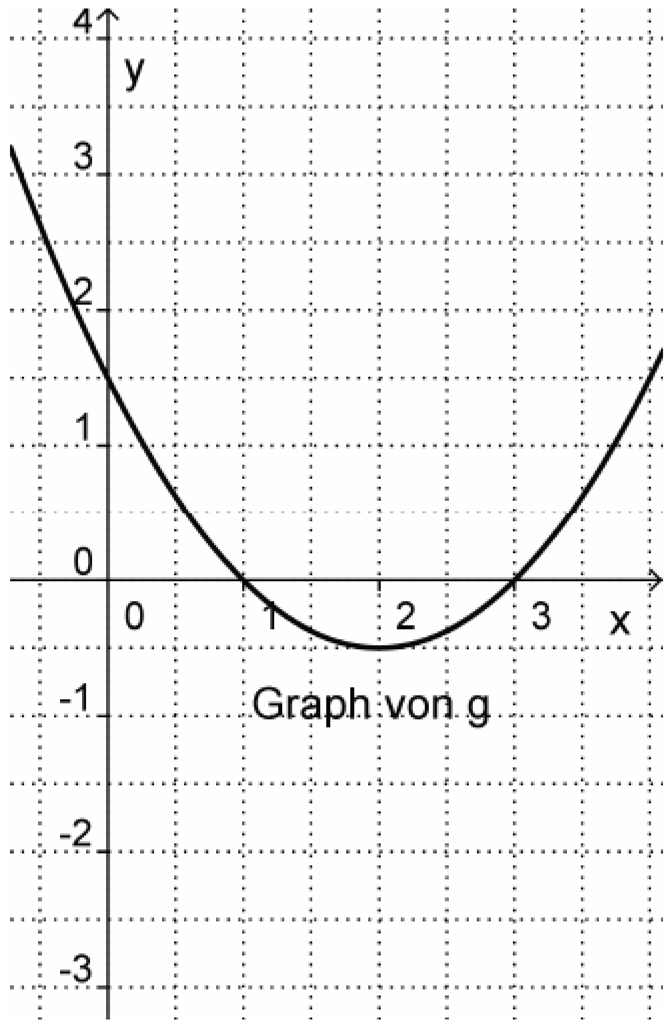
b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S_x(1\,|\,0)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von *f* und *g* ist.
Der Graph der Funktion *f* schneidet die *x*-Achse in zwei weiteren Punkten. Ermitteln Sie deren Koordinaten.

c) Bestimmen Sie für den Graphen von *f* die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art. Für die Koordinaten der Extrempunkte genügen Näherungswerte.
Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von *f* in der Anlage ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Sees zwischen seinem nördlichsten und seinem südlichsten Punkt in Metern.
Berechnen Sie die Größe der Seefläche.

e) Westlich des Sees verläuft eine geradlinige Straße durch den Punkt $P(1\,|\,1)$ parallel zur Wendetangente des Graphen von *f*.
Der Graph von *f* besitzt genau einen Wendepunkt. Ermitteln Sie dessen Koordinaten und bestimmen Sie eine Gleichung für den Straßenverlauf. Zeichnen Sie diesen in der Anlage ein.
[Kontrollergebnis: $W\left(\frac{4}{3}\,\middle|\,\frac{20}{27}\right)$]
Berechnen Sie die Entfernung des Wendepunktes von der Straße auf einen Meter genau.

f) Im Punkt $Q(3\,|\,0)$ befinden sich Start und Ziel einer Schwimmveranstaltung. Für die Schwimmveranstaltung soll durch zwei Bojen im See ein 5 km langer Kurs in Form eines gleichseitigen Dreiecks abgesteckt werden, wobei eine der drei Schwimmbahnen in West-Ost-Richtung verläuft.
Berechnen Sie für den beschriebenen Schwimmkurs die exakten Koordinaten der Bojen.



y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
1
2
3
x
Graph von g

A 2 Analytische Geometrie

Von einem Prisma ABCDEFGH mit der Grundfläche ABCD und der Kante AE sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten der folgenden Punkte gegeben:

$A(5 \mid -1 \mid 2)$, $B(3 \mid 3 \mid -2)$, $C(-1 \mid 5 \mid 2)$, $D(1 \mid 1 \mid 6)$ und $E(9 \mid 3 \mid 4)$.

2.1 Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

2.2 Geben Sie die Koordinaten der Punkte F, G und H an.

Stellen Sie das Prisma grafisch dar.

2.3 Durch das Prisma ABCDEFGH wird ein Behälter beschrieben.

2.3.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der sich die Punkte A, B und C befinden.

2.3.2 Im Mittelpunkt der Seitenfläche BCGF des Behälters befindet sich ein Loch. Durch dieses hindurch fällt vom Punkt $P(4 \mid 10 \mid 1)$ ein Lichtstrahl und trifft auf die Seitenfläche ABCD.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Auftreffpunktes sowie die Größe des Winkels, unter dem der Lichtstrahl auf ABCD trifft.

2.4 Das Prisma hat ein Volumen von 216.
Die xy-Ebene teilt das Prisma in zwei Teilkörper.

Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina der beiden Teilkörper.

A3 Analysis und Stochastik

3 Gegeben ist eine Funktionenschar mit fünf Funktionen durch die Gleichung

$$f_c(x) = -x^2 - 2x + c \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R},\ c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Ihre Graphen heißen F_c.

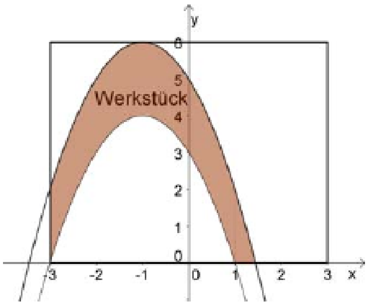
3.1 Geben Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Koordinaten der Hochpunkte der Graphen F_c in Abhängigkeit von c an.

Skizzieren Sie die Graphen F_c in ein geeignetes Koordinatensystem, wobei die Verwendung der oben ermittelten Punkte ausreichend ist.

3.2 Zeigen Sie, dass der Inhalt der Flächen, den die Graphen F_c jeweils mit der x - Achse vollständig einschließen, mit der Gleichung $A(c) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{(c+1)^3}$ berechnet werden kann.

Stellen Sie die Folge der Flächeninhalte A(c) grafisch dar.

3.3 Aus einem quadratischen Blech mit 6 cm Kantenlänge wird ein Teil ausgestanzt (siehe Abbildung).
Legt man ein Koordinatensystem mit seinen Achsen parallel zu den Seiten des Bleches und seinen Ursprung in die Mitte der unteren Kante, so können die Stanzkanten durch Teile von je zwei verschiedenen Graphen F_c beschrieben werden (x in cm).



Berechnen Sie den Flächeninhalt des Werkstücks für F_5 und F_3.

Ermitteln Sie die Anzahl der verschiedenen herstellbaren Werkstücke.

3.4 Der an dieser Maschine arbeitende Kollege ist angehalten, die Qualität der von ihm gestanzten Bleche zu prüfen. Bei diesem Produktionsvorgang darf der Anteil fehlerhafter Teile maximal bei 4 % liegen. Dazu werden durch den Kollegen aus einer Tagesproduktion rein zufällig 6 Bleche ausgewählt und überprüft.
Die Zufallsvariable X beschreibt hierbei die Anzahl der fehlerhaften Teile.

Beschreiben Sie, unter welchen Bedingungen X als binomialverteilt angenommen werden kann.

X wird als binomialverteilt mit p = 0,04 angenommen.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

Das folgende Entscheidungskriterium zur Qualitätskontrolle wird benutzt:
„Nur wenn sich kein fehlerhaftes Blech unter den 6 überprüften Teilen befindet, gibt es keinen Einwand bezüglich der Qualität der gestanzten Bleche."

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Tagesproduktion fälschlicherweise als mangelhaft eingestuft wird.

P3 Stochastik (8 BE)

In einer Stadt sind erfahrungsgemäß 4 % der Fahrgäste in der Straßenbahn Schwarzfahrer. Im Durchschnitt werden dort 8 % aller Fahrgäste kontrolliert.

3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei beliebigen Fahrgästen mindestens einer kontrolliert wird.

3.2 Ein beliebiger Fahrgast wird kontrolliert und ist Schwarzfahrer.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

A: Unter 50 Fahrgästen befindet sich kein Schwarzfahrer.
B: Unter 50 Fahrgästen befindet sich mindestens ein Schwarzfahrer.
C: Unter 50 Fahrgästen befindet sich genau ein Schwarzfahrer.

3.4 Wie viele Schwarzfahrer sind unter 50 Fahrgästen auf lange Sicht durchschnittlich zu erwarten?
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall.