Lösung zu

a) Punktprobe

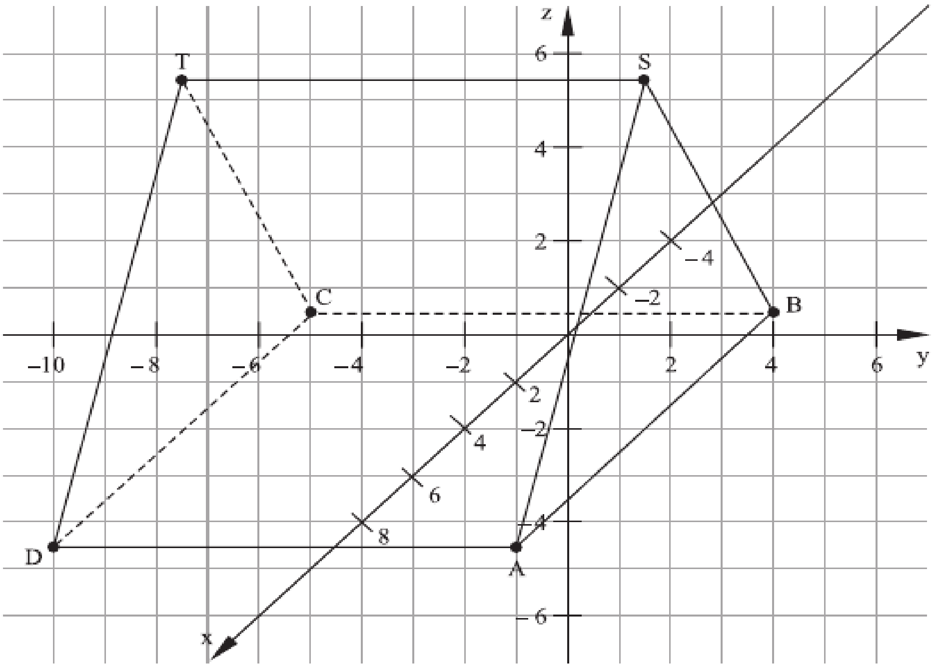
Einsetzen der Koordinaten von C bzw. D in die Koordinatengleichung von E liefert:

$-5 + 10 \cdot 0{,}5 = 0$ (x-Koordinate spielt keine Rolle)

Die Gleichung ist erfüllt und somit sind C und D Elemente der Ebene E. Das heißt, C und D liegen direkt auf dem Hang.

Zeichnung

Die hier verwendeten Zeichnungen sind maßstäblich verkleinert. Das in der Prüfung gegebene Anlagenblatt hat das Format DIN-A4.



b)

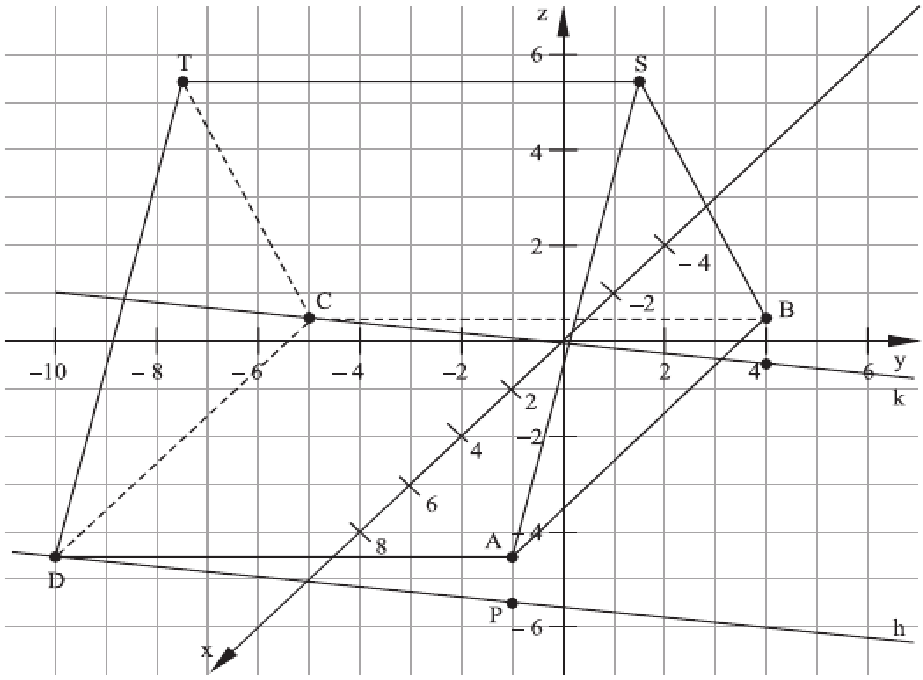
Die Geraden h und k haben wegen Parallelität die Gleichungen:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \cdot \overrightarrow{DP} \text{ bzw. } \vec{x} = \overrightarrow{OC} + \mu \cdot \overrightarrow{DP};\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Einsetzen der Koordinaten liefert:

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -0{,}9 \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -0{,}9 \end{pmatrix};\ \mu \in \mathbb{R}$$



c)
Die Ebene, in der die Bodenplatte liegt, ist parallel zur x-y-Ebene und hat, aus den Koordinaten der vier Eckpunkte ersichtlich, die Gleichung **B: z = 0,5**. Die Ebene, die parallel zur Bodenplatte und 2,5 LE darüber liegt, hat folglich die Gleichung **D: z = 3**.
Die Eckpunkte S1, S2, S3, S4 der Deckenfläche ergeben sich als Durchstoßpunkte der Dachkanten AS, BS, CT, DT durch die Ebene D. Es gilt:

$$g_{AS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{einsetzen in die Ebenengleichung D}$$

$$0{,}5 + 7{,}5 \cdot r = 3 \quad \text{ergibt} \quad r = \frac{1}{3} \quad \text{man erhält den Eckpunkt} \quad S1\left(\frac{25}{3}; 4; 3\right)$$

$$g_{BS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$0{,}5 + 7{,}5 \cdot s = 3 \quad \text{ergibt} \quad s = \frac{1}{3} \quad \text{man erhält den Eckpunkt} \quad S2\left(\frac{5}{3}; 4; 3\right)$$

$$g_{CT}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

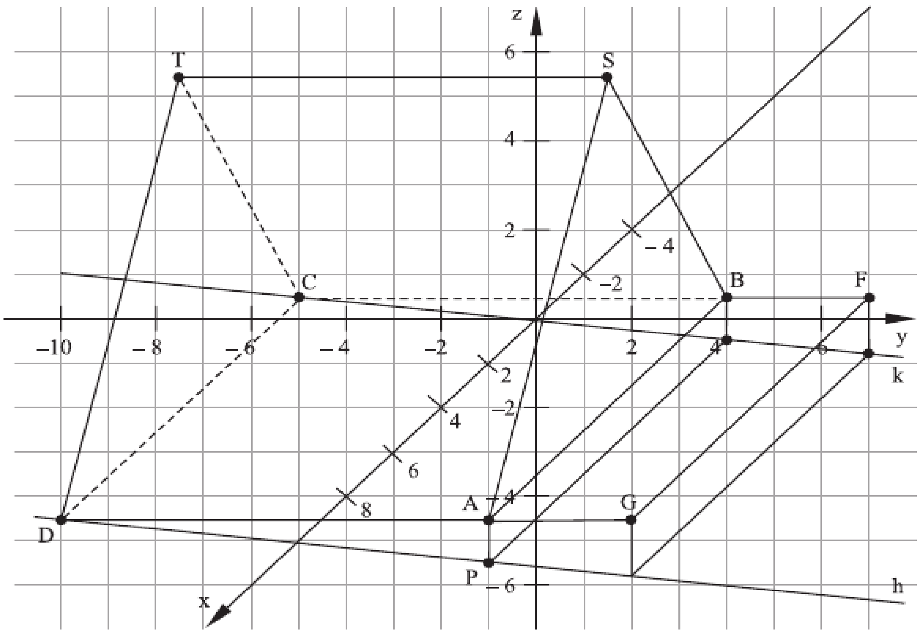
$0{,}5 + 7{,}5 \cdot t = 3$ ergibt $t = \frac{1}{3}$ man erhält den Eckpunkt $S3\left(\frac{5}{3}; -5; 3\right)$

$$g_{DT}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u \in \mathbb{R}$$

$0{,}5 + 7{,}5 \cdot u = 3$ ergibt $u = \frac{1}{3}$ man erhält den Eckpunkt $S4\left(\frac{25}{3}; -5; 3\right)$

Bemerkung: Die Punkte kann man auch über Symmetriebetrachtungen ermitteln.

d)
Der mit Sand aufzufüllende Terrassenkörper ist ein gerades Prisma mit einem Trapez als Grund- und Deckfläche.



Die beiden Grundseiten des Trapezes sind die Höhen der Punkte A und G (bzw. B und F) über der Hangebene E.
Die Höhe von A über E ist der Betrag der Strecke AP . $A(10; 4; 0{,}5)$, $P(10; 4; -0{,}4)$
| AP | = 0, 4 + 0,5 = 0,9 m
Bezeichnet man die senkrechte Projektion von G in E mit G', so gilt GG'(10 | 7 | g) und eingesetzt in die Koordinatengleichung von E: $y+10z=0$ ergibt sich:
7 + 10 · g = 0 ⇒g = −0,7 $G'(10; 7; -0{,}7)$ $G(10; 7; 0{,}5)$
Die Höhe von G über E ist also der Betrag der Strecke GG' :
|GG'| = $0{,}7+0{,}5=1{,}2\,m$
Für die Höhe des Trapezes gilt | AG | = 3 und für die Höhe des Prismas | AB | = 10.

$$V_{Prisma}=A_G \cdot h=A_{Trapez} \cdot h$$

$$V_{Prisma}=\frac{0{,}9\,m+1{,}2\,m}{2} \cdot 3\,m \cdot 10\,m=31{,}5\,m^3$$

Für den Terrassenbau werden 31,5 Kubikmeter Sand zum Auffüllen benötigt.

e) Koordinaten des Schattenpunktes
Die Gerade g_t, die den Sonnenstrahl durch den Punkt S enthält, hat die Gleichung:

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5t \\ (1+t) \cdot 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{pmatrix} \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$$

Im Zusammenhang mit der Ebene B: z = 0,5, in der sowohl die Bodenplatte als auch die Terrassenebene liegt, ergibt sich:

$$8 - 7{,}5 \cdot r = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

Damit hat der von t abhängige Schattenpunkt die Koordinaten $S'_t(5-5t; 5{,}5+1{,}5t; 0{,}5)$.

Bewegung des Schattenpunktes
Da der Zeitparameter t durch das Intervall $0 \leq t \leq 1$ eingeschränkt ist, erhält man als Anfangspunkt der Bewegungslinie $S'_0(5; 5{,}5; 0{,}5) = M$, wobei M der Mittelpunkt der Terrassenfläche ist. Für den Endpunkt der Bewegungslinie erhält man $S_1'(0; 7; 0{,}5) = F$, wobei F Eckpunkt der Terrassenfläche ist.

Siehe : S_t' aus $x = 5 - 5t$ folgt $t = 1 - \frac{x}{5}$ folgt eingesetzt in $y = 5{,}5 + 1{,}5t$ die lineare Funktion: $y = 5{,}5 + 1{,}5 \cdot \left(1 - \frac{x}{5}\right)$ $\quad y = -0{,}3x + 7$

Der Schattenpunkt bewegt sich in einer Stunde linear auf der Diagonalen AF der Terrassenfläche von M nach F.