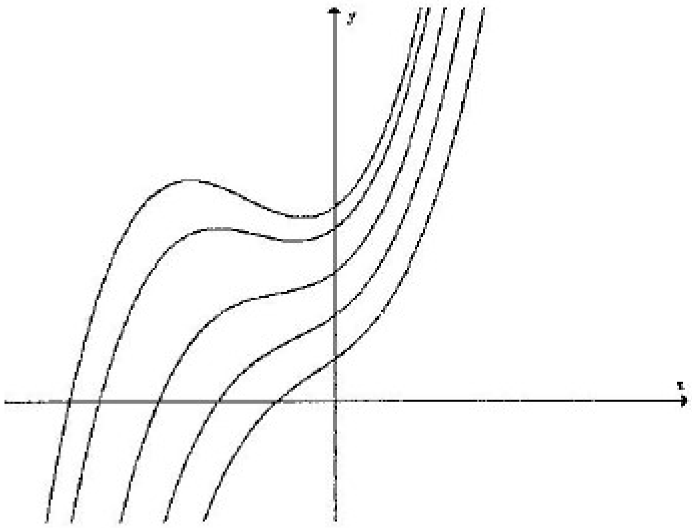
A1 Analysis

1. Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x)=x^3+3x^2+x+3$, $x\in\mathbb{R}$. Der Graph ist G.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G mit der y-Achse, der lokalen Extrempunkte und des Wendepunktes von G.
- Weisen Sie die Art der Extrema und die hinreichende Bedingung für die Existenz des Wendepunktes nach.
- Weisen Sie nach, dass $x_N=-3$ die einzige Nullstelle der Funktion ist.
- Zeichnen Sie G im Intervall $-3{,}5\le x\le 1$.

2. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Koordinatenachsen und G vollständig begrenzt wird. Geben Sie die verwendete Stammfunktion an.
3. Gegeben ist ein Rechteck ABCD durch die Eckpunkte $A(0;0), B(0;f(r)), C(r;f(r))$ und $D(r;0)$ mit $r\in\mathbb{R}$ und $-3<r<0$. Ermitteln Sie den Wert von r, für den der Unfang des Rechtecks ABCD extremal wird. Bestimmen Sie rechnerisch die Art des Extremums und den extremalen Umfang.
4. Es gibt eine Tangente t_1 , die G im Punkt $P(0;3)$ berührt. Eine weitere Tangente t_2 verläuft parallel zu t_1 . Ermitteln Sie rechnerisch je eine Gleichung für t_1 und t_2 .
5. Die Graphen G_p der Funktionsschar f_p mit $f_p(x)=x^3+p\cdot x^2+x+p$ mit $x, p\in\mathbb{R}$, $p>0$ besitzen in Abhängigkeit von den Werten von p keine oder zwei lokale Extrempunkte (siehe Abbildung). Begründen Sie, dass G_p für alle Werte von p mit $0<p<\sqrt{3}$ und $p=\sqrt{3}$ keine lokalen Extrempunkte besitzt.



A2 Analytische Geometrie

Der Eingangsbereich eines Gebäudes soll durch einen Anbau neu gestaltet werden. In einem kartesischen Koordinatensystem wird die Dachfläche durch die Punkte $E(0;0;5), F(4;1;4), G(4;4;4)$ und $H(0;5;5)$ beschrieben (1LE = 1m).

1. Der Punkt A der Grundfläche ABCD liegt im Koordinatenursprung. Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte der Grundfläche des Anbaus an.
2. Stellen Sie den Anbau in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
3. Zeigen Sie, dass es sich bei der Dachfläche EFGH um ein gleichschenkliges Trapez handelt.
4. Ermitteln Sie die Koordinatengleichung für die Ebene ϵ_1 , in der die Dachfläche EFGH liegt. Berechnen Sie die Neigung dieser Dachfläche zur x-y-Ebene.
5. Die Verlängerung der nichtparallelen Dachkanten $\overline{EF}$ und $\overline{HG}$ schneiden einander in einem Punkt. Bestimmen Sie den Abstand dieses Punktes zur x-y-Ebene.
6. Für weitere Montagen wird im Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfäche ABCD ein Pfeiler senkrecht zur Grundfläche errichtet, der bis zur Dachfläche reicht. Berechnen Sie die Länge des Pfeilers.
7. Durch die Ebene ϵ_2 mit der Gleichung $z=4$ wird im Anbau eine Zwischendecke festgelegt. Berechnen Sie das Volumen oberhalb der Zwischendecke.

A3 Analysis

Im Trinkwasser sind normalerweise zwischen 0 und 100 Keime pro cm³ enthalten. In einem Schülerexperiment wurde die Veränderung der Keimzahl in einer Probe untersucht. Die Schüler haben in zehn aufeinanderfolgenden Tagen die Keimzahl bestimmt. Der Zusammenhang zwischen Zeit in Tagen (x) und der Keimzahl pro cm³ (y) haben sie als Funktion f dargestellt und die Gleichung für diese Funktion mit $y=f(x)=14\cdot(x-9)^2\cdot e^{x-9}+2$ mit $x\in\mathbb{R}$, $1\leq x\leq 10$ ermittelt . Die Änderung der Keimzahl wird durch die erste Abbildung angegeben.

1. Bestimmen Sie Extrema, Wendepunkte und das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereiches. Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[1;10]$. Geben Sie den Zeitpunkt an, an dem die Keimzahl am geringsten ist. Wie groß ist sie zu diesem Zeitpunkt?
2. Geben Sie die höchste Keimzahl im Beobachtungszeitraum an.
3. Zu welchem Zeitpunkt verringert sich die Keimzahl am stärksten?
4. Ein Schüler der Projektgruppe war der Meinung, der Zusammenhang zwischen Keimzahl und der Zeit lässt sich durch eine lineare Funktion g darstellen. Er hat mit dem Wert $x=1$ und dem Anstieg der Funktion zu diesem Zeitpunkt eine Funktionsgleichung aufgestellt. Geben Sie eine Gleichung für g an. Bestimmen Sie, wie viele Übereinstimmungen der Keimzahlen bei Verwendung der Funktionen f und g auftreten. Geben Sie die Zeitpunkte an.
5. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $(9;16)$ verläuft.
6. Der Graph von f und die Geraden $x=2, x=4$ und die x-Achse umschließen eine Fäche vollständig. Berechnen Sie Inhalt und Umfang dieser Fläche.