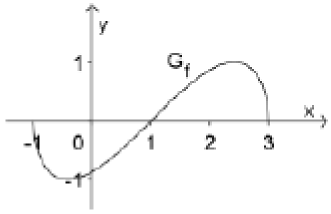
Aufgabe 1

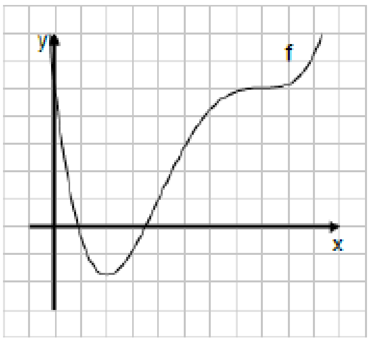
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer für $-1 \leq x \leq 3$ mit $x \in \mathbb{R}$ definierten Funktion f, die bei $x=-1; x=1 \, und \, x=3$ Nullstellen besitzt. Die Funktion F mit $F(x)=-\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3$ ist eine Stammfunktion von f.



- Begründen Sie, dass die für $-1 \leq x \leq 3$ mit $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion H mit $H(x)=-\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3+1$ ebenfalls eine Stammfunktion von f ist.
- Begründen Sie , dass der Wert des Integrals $\int_0^3 f(x)\,dx$ nicht mit dem Inhalt der Fläche übereinstimmt, die für $0 \leq x \leq 3$ zwischen G_f und der x-Achse liegt.
- Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 2

Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.



- Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f.
- Begründen Sie, dass der Grad der Funktion mindestens vier ist.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte $A(-1;1;4), B(-3;5;6)$ und $C_t(-2+t;3;5+t)$ mit $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$

- Zeigen Sie, dass jedes der Dreiecke ABC_t gleichschenklig ist.
- Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die das jeweils zugehörige Dreieck ABC_t gleichseitig ist.

Aufgabe 4

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$ und

$h_a: \vec{x} \begin{pmatrix} -a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 3 \\ 2 \\ 1 + a \end{pmatrix}; s, a \in \mathbb{R}$

- Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Richtungsvektoren von g und h_a zueinander senkrecht stehen.
- Weisen Sie nach, dass sich für $a = -2$ die Geraden g und h_a schneiden.

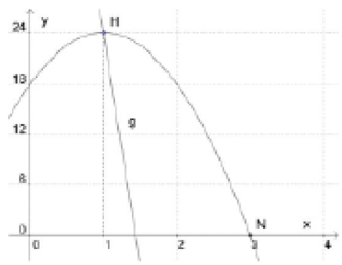
Aufgabe 5

Ein Glücksrad ist in einen blauen, einen gelben und einen roten Sektor unterteilt. Beim Drehen des Glücksrades tritt „Blau“ mit der Wahrscheinlichkeit p und „Rot“ mit der Wahrscheinlichkeit $2 \cdot p$ ein.

- Geben Sie an, welche Werte von p bei diesem Glücksrad möglich sind.
- Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
  Betrachtet wird das Ereignis E: Es tritt mindestens einmal „Rot“ auf.
  Zeigen Sie, dass das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 4 \cdot p - 4 \cdot p^2$ eintritt.

Aufgabe 6

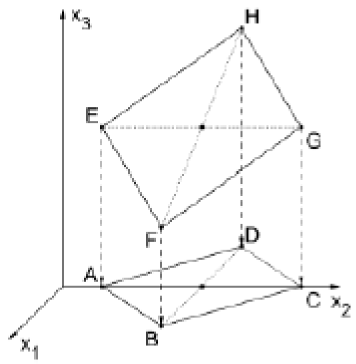
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -6x^2 + 12x + 18, x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1;24)$ und $N(3;0)$ verläuft.



- Zeigen Sie, dass $\int_0^1 f(x)\,dx = 22$ gilt.
- Die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, hat den Inhalt 54. Eine Geraden g, die durch den Punkt H verläuft, teilt diese Fläche in zwei Teilflächen gleichen Inhalts. Bestimmen Sie die Stelle, an der g die x-Achse schneidet.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Raute ABCD mit $A(0;2;0), B(4;7;0), C(0;12;0)\, und\, D(-4;7;0)$. Jeder Eckpunkt der Raute entsteht durch Verschiebung des Quadrates EFGH senkrecht zur $x_1-x_2-Ebene$. Dabei geht der Punkt A aus dem Punkt $E(0;2;8)$ sowie der Punkt C aus dem Punkt $G(0;12;8)$ hervor.



- Geben Sie die $x_1-Koordinate$ und die $x_2-Koordinate$ des Punktes F an.
- Bestimmen Sie die koordinaten der Punkte F und H.

Aufgabe 8

Beim Werfen einer Reißzwecke kann diese entweder auf der Seite oder auf dem Kopf liegen bleiben. Eine Reißzwecke wird zweimal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dabei mindestens einmal auf der Seite liegen bleibt, beträgt $0{,}84$.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei den zwei Würfen genau einmal auf dem Kopf liegen bleibt.

Aufgabe 9

Bei der Produktion von Halbleiterbauteilen eines bestimmten Typs ist im Mittel jedes fünfte Bauteil fehlerhaft. Jedes produziertes Bauteil wird abschließend einer Kontrolle unterzogen und dabei entweder als fehlerhaft oder als einwandfrei eingestuft. Im Rahmen der Kontrolle wird ein fehlerhaftes Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% als fehlerhaft eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einwandfreies Bauteil als fehlerhaft eingestuft wird, beträgt 40%.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil einwandfrei ist und im Rahmen der Kontrolle korrekt eingestuft wurde. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil fehlerhaft ist, wenn es im Rahmen der Kontrolle als einwandfrei eingestuft wurde.

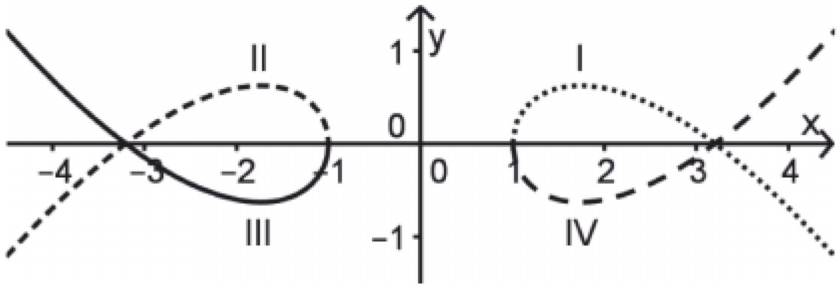
Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{8}{5}\right)$ und maximalem Definitionsbereich D.

a) Geben Sie D an.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

c) Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I bis IV die Funktion g mit $g(x)=-f(x)$ darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Aufgabe 2

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x)=\sin(x)$. Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=1$.

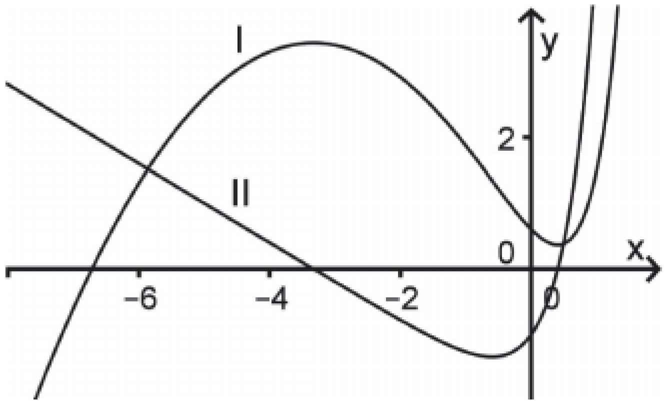
a) Geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ an.

b) Begründen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion, dass $\int_0^{5\pi} f(x)\,dx=2$ gilt.

c) Beschreiben Sie, wie der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h(x)=1+2\sin(x)$ aus dem Graphen von f hervorgeht.

Aufgabe 3

a) Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktion. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



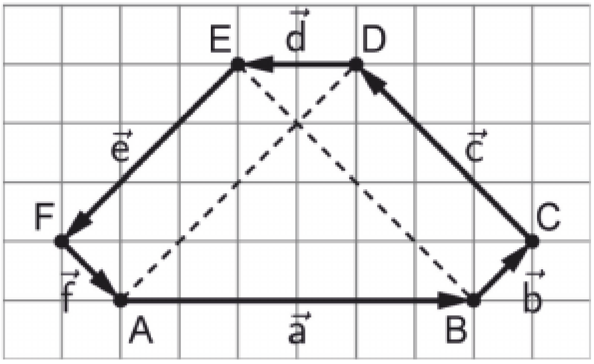
b) Eine nicht lineare Funktion h hat keine Nullstelle. Der Graph von h nähert sich für $x \to -\infty$ asymptotisch der Geraden mit der Gleichung $y = -3$. Geben Sie einen Funktionsterm von h an und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.

Aufgabe 4

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.
a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.
b) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 5

Im abgebildeten Sechseck ABCDEF sind jeweils zwei Seiten parallel zueinander.



r

r

a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar.
$\vec{x}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ und $\vec{y}=\vec{a}+\vec{c}$

b) Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{FB}$ mithilfe von drei der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.
c) Der Punkt A hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $x_1=6$, $x_2=2$ und $x_3=-4$. Der Mittelpunkt der Strecke AB wird mit M bezeichnet. Der Punkt $K(2;0;8)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AM. Ermitteln Sie die Koordinaten von B.

Aufgabe 6

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1;2;5), B(2;7;8)$ und

$C(-3;2;4)$ gegeben.
a) Weisen Sie nach, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.
b) Für jede reelle Zahl a ist ein Punkt $D_a(a;2+a\sqrt{2};5+\sqrt{2})$ gegeben. Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Strecke von A nach D_a die Länge 2 hat.

Aufgabe 7

In einem Behälter befinden sich sechs rote und vier grüne Kugeln. Zwei Kugeln werden zufällig entnommen.

a) Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Beide entnommenen Kugeln sind grün.“

B: „Höchstens eine der entnommenen Kugeln ist rot.“

b) Formulieren Sie für folgende Ereignisse jeweils das Gegenereignis:

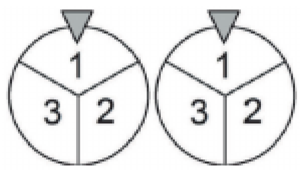
C: „Mindestens eine der entnommenen Kugeln ist rot.“

D: „Beide entnommenen Kugeln sind rot oder beide sind grün.“

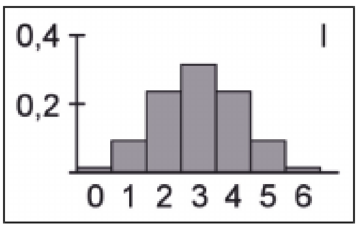
Aufgabe 8

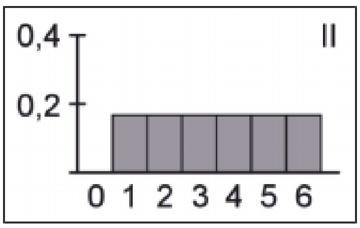
a) Zwei Würfel, deren Seiten jeweils mit den Ziffern 1 bis 6 durchnummeriert sind, werden geworfen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Augensumme drei ist.

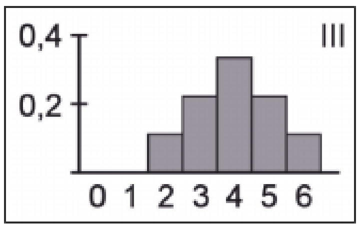
b) Betrachtet werden die folgenden Zufallsgrößen X, Y und Z:

X: Augenzahl beim Werfen eines Würfels, dessen Seiten mit den Ziffern 1 bis 6 durchnummeriert sind	Y: Augensumme beim Drehen der beiden abgebildeten Glücksräder	Z: Anzahl der „Wappen“ beim sechsmaligen Werfen einer Münze, deren Seiten „Wappen“ bzw. „Zahl“ zeigen.
		

Jede der Zufallsgrößen gehört zu einer der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen I, II und III. Ordnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen den Zufallsgrößen zu und begründen Sie jede Ihrer Zuordnungen.







Aufgabe 9

Von weißen Mäusen eines Zuchtbetriebs ist bekannt, dass 20 % der Mäuse an der Krankheit A und 8 % an der Krankheit B leiden. 3 % der Mäuse leiden an beiden Krankheiten.

a) Begründen Sie, dass der Anteil der Mäuse, die mindestens an einer der beiden Krankheiten leiden, 25 % beträgt.

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1-\left(\binom{10}{9}\cdot 0{,}75^{9}\cdot 0{,}25^{1}+\binom{10}{10}\cdot 0{,}75^{10}\right)$

berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.

Aufgabe 10

Die binomialverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2 geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von $p_1=0{,}8\ bzw.\ p_2=0{,}2$ jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

a) Betrachtet wird die Zufallsgröße X_1. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann.

b) Geben Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $1-\left(\binom{5}{3}\cdot 0{,}8^{3}\cdot 0{,}2^{2}+\binom{5}{4}\cdot 0{,}8^{4}\cdot 0{,}2^{1}+\binom{5}{5}\cdot 0{,}8^{5}\right)$ angegeben wird.

c) Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 in Abbildung 2 dar.

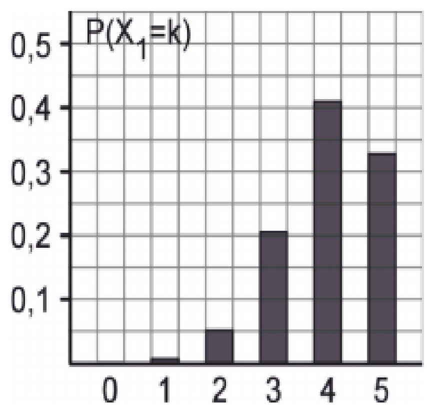


Abb. 1

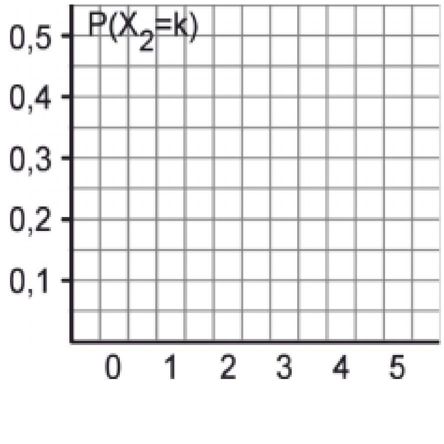


Abb. 2