Lösung:

Aufgabe 1

- $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$ Ansatz: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2-6+4=0$ daraus folgt, dass $\sphericalangle(ABC)=90°$, das Dreieck ist rechtwinklig
- $A=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|=0{,}5\sqrt{14}\cdot\sqrt{12}=6{,}48$ FE $u=\sqrt{14}+\sqrt{12}+\sqrt{26}\approx 12{,}3$ LE

  $\cos(\alpha)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}$ $\alpha=42{,}8^{\circ}$

- $\vec{n}=\overrightarrow{AC}\,x\,\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}10\\-2\\8\end{pmatrix}$ $D=-\vec{n}\cdot\overline{OA}=-6$ also $\epsilon:10x-2y+8z-6=0$

- Richtungsvektor der z-Achse: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

  $\sin(\alpha)=\frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{x}|}=\frac{8}{\sqrt{168}}$ ergibt $\alpha=38{,}113°$

- G_t in ϵ einsetzen : $10\cdot2\cdot t-2\cdot t^2+8\cdot(-\frac{3}{2})-6=0$ ergibt $t=1$ und $t=9$

  die gesuchten Punkte sind: $G_{t_1}(2;1;-\frac{3}{2})$ und $G_{t_2}(18;81;-\frac{3}{2})$

- ein Prisma ist gerade, wenn die Seiten senkrecht auf der Grundfläche stehen

  Normalenvektor der Grundfläche $\vec{n}=\begin{pmatrix}10\\-2\\8\end{pmatrix}$

  Vektor der Seitenfläche: $\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$, beide Vektoren sind linear abhängig, also steht die Seitenkante CF senkrecht auf der Grundfläche ABC, weiterhin sind die Seitenkanten parallel (Prisma), daraus folgt, dass das Prisma gerade ist

- $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}5\\4\\6\end{pmatrix}$ $E(5;4;6)$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}6\\1\\4\end{pmatrix} \qquad D(6;1;4)$$

- Darstellung fehlt hier

- $V_{Prisma}=A_g\cdot h=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{CF}|=42\,VE$ oder $P_{Prisma}=\frac{1}{2}|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{CF}|=42\,VE$

- Veranschaulichung in der Darstellung

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\2\\6\end{pmatrix} \quad \text{also} \quad S\left(\frac{5}{2};2;6\right)$$

$V_{Pyramide}=\frac{1}{3}\cdot A_G\cdot h$ mit $h=\frac{|5\cdot\frac{5}{2}-2+4\cdot 6-3|}{\sqrt{25+1+16}}\approx 4{,}86$ LE (Abstand S- Grundfläche)

$$V_{Pyramide}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|\vec{n}|\cdot h\approx 10{,}5\,VE$$

$$\frac{10{,}5\,VE}{42\,VE}=0{,}25$$

Der prozentuale Anteil der Pyramide am Volumen des Prisma beträgt etwa 25%.

Aufgabe 2

1.

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

$A(0 \mid 5) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 5$

$B(5 \mid 2) \quad \Rightarrow \quad f(5) = 2$

$C(7 \mid 1{,}4) \quad \Rightarrow \quad f(7) = 1{,}4$

$D(10 \mid 3) \quad \Rightarrow \quad f(10) = 3$

$E(13 \mid 1{,}8) \quad \Rightarrow \quad f(13) = 1{,}8$

$a = -0{,}00405,\ b = 0{,}101,\ c = -0{,}733,\ d = 1{,}04,\ e = 5$

$f(x) = -0{,}004x^4 + 0{,}1x^3 - 0{,}73x^2 + 1{,}04x + 5$

2.

$f(x) = -0{,}004x^4 + 0{,}1x^3 - 0{,}72x^2 + x + 5$

Ableitungen

$f'(x) = -0{,}016x^3 + 0{,}3x^2 - 1{,}44x + 1$

$f''(x) = -0{,}048x^2 + 0{,}6x - 1{,}44$

$f'''(x) = -0{,}096x^2 + 0{,}6$

Extrema

Notw. Bedingung: $f'(x_E) = 0$

$x_{E1} = 0{,}83,\ x_{E2} = 6{,}68,\ x_{E3} = 11{,}23$

Hinr. Bedingung: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(x_{E1}) = -0{,}97 < 0 \Rightarrow HP;\quad f''(x_{E2}) = 0{,}43 > 0 \Rightarrow TP;$

$f''(x_{E3}) = -0{,}76 > 0 \Rightarrow HP$

Funktionswerte

$f(x_{E1}) = 5{,}39,\ f(x_{E2}) = 1{,}4,\ f(x_{E3}) = 3{,}44$

$H_1(0{,}8 \mid 5{,}4),\ T(6{,}7 \mid 1{,}4),\ H_2(11{,}2 \mid 3{,}4)$

Wendepunkte

Notw. Bedingung: $f''(x_W) = 0$

$x_{W1} = 3{,}24,\ x_{W2} = 9{,}26,$

Hinr. Bedingung: $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(x_{W1}) = 0{,}29 \neq 0 \Rightarrow WP;\quad f'''(x_{W2}) = -0{,}29 \neq 0 \Rightarrow WP$

Funktionswerte

$f(x_{W1}) = 3{,}64,\ f(x_{W2}) = 2{,}51$

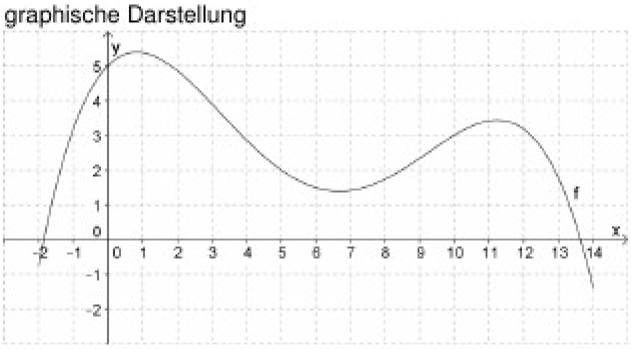
$W_1(3{,}2 \mid 3{,}6), W_2(9{,}3 \mid 2{,}5)$

Nullstellen

$f(x) = 0$

$x_{01} = -1{,}9$ und $x_{02} = 13{,}6$

graphische Darstellung



3.

Wind aus NordOst $\Rightarrow$ Anstieg m = 1

$\Rightarrow$ Anstieg der Küstenlinie m = -1

$f'(x) = -1$

$x_1 = 2{,}6\,,\; x_2 = 3{,}9\,,\; x_3 = 12{,}2$

Funktionswerte

$f(x_1) = 4{,}29\,,\; f(x_2) = 2{,}94\,,\; f(x_3) = 2{,}98$

$S_1(2{,}6 \mid 4{,}3)\,,\; S_2(3{,}9 \mid 2{,}9)$ und $S_3(12{,}2 \mid 3{,}0)$

Gerade durch den Punkt $T(10 \mid 6)$

$y = x - 4$

Gerade und Funktionsgleichung der Küstenlinie gleichsetzen

$f(x) = x - 4$

$x_1 = \cancel{-2{,}93}$ (entfällt), $x_2 = 5{,}63$

$L(5{,}6 \mid 1{,}6)$

4.

Gerade g durch $P(2 \mid 4{,}86)$ und $D(10 \mid 3)$

$g(x) = -0{,}23x + 5{,}32$

Fläche $\int_2^{10} g(x) - f(x)\,dx = 11{,}88$

Die Fläche beträgt rund 11,9 km^2.

Länge der Küstenlinie

Bogenlänge b: $b = \int_2^{10} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 9{,}71$

Die Küstenlinie hat eine Länge von rund 9,7 km.

4 km Küstenlinie von P aus

Bogenlänge b: $b = \int_2^{k} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 4 \qquad \Rightarrow \qquad k = 4{,}88$

neuer Punkt $Q(4{,}88 \mid 2{,}09)$