

**Zentrale schriftliche Abiturprüfung****2012****Mathematik**
Grundkurs mit CAS**Aufgabenvorschlag**

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.
Gesamtbearbeitungszeit:	210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt:	Analysis
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt:	Stochastik
Hinweis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 CAS: Sonnenblumen

Gegeben ist die Funktion h mit $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 21t + 10$; $t \in \mathbb{R}$. Sie beschreibt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ für einen gewissen Zeitraum die Höhe einer Sonnenblume der Art „Gelber Riese“, wobei t in Wochen nach Beobachtungsbeginn und $h(t)$ in cm angegeben werden.

- a) Berechnen Sie die Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von h und bestimmen Sie deren Art. Zeichnen Sie für $-6 \leq t \leq 12$ den Graphen von h in ein geeignetes Koordinatensystem. Erläutern Sie, bis zu welchem Wert von t der Graph von h sinnvolle Werte für das Wachstum der Sonnenblume liefert.
- b) Geben Sie die Höhe der oben beschriebenen Sonnenblume zu Beginn des Beobachtungszeitpunktes in Zentimetern an.
Berechnen Sie die mittlere Wachstumsrate im Zeitraum von $t = 1$ bis $t = 6$ sowie die momentanen Wachstumsraten zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 6$. Ermitteln Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt eine Wachstumsrate von $15 \frac{\text{cm}}{\text{Woche}}$ erreicht ist.
- c) Ein Verkäufer wirbt mit einem Schild: „Meine Pflanzen erreichen eine Wachstumsrate von 27 cm pro Woche. Da können Sie beim Wachsen zusehen!“.
Überprüfen Sie rechnerisch, ob die versprochene Wachstumsrate erreicht werden kann, indem Sie die größte erreichte momentane Wachstumsrate der Pflanze ermitteln.
- d) Von einer zweiten Sonnenblumenart „Goldene Gloria“ ist nur die Funktion v der momentanen Wachstumsrate bekannt. Die Gleichung lautet $v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 8t + 9$, wobei t in Wochen und $v(t)$ in $\frac{\text{cm}}{\text{Woche}}$ angegeben werden. Zum Zeitpunkt $t = 2$ ist eine Sonnenblume der Art „Goldene Gloria“ 50 cm hoch.
Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Funktion g , die die Höhe dieser Sonnenblume in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt (mit t in Wochen und $g(t)$ in cm).
- e) Das Wachstum einer dritten Sonnenblumenart „Sonnenstern“ wird durch die Funktion k mit $k(t) = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 51t + 30$ beschrieben, wobei t in Wochen nach Beobachtungsbeginn und $k(t)$ in cm angegeben werden.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt t , an dem der Höhenunterschied zweier Sonnenblumen der Arten „Gelber Riese“ und „Sonnenstern“ am größten ist, und geben Sie diesen größten Höhenunterschied an.
[Zielfunktion d zur Kontrolle: $d(t) = -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 30t + 20$]

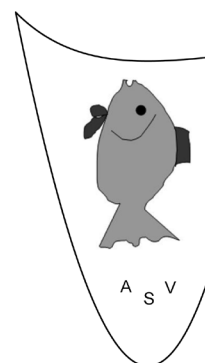
Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	15	10	5	4	6	40

Aufgabe 1.2 CAS: Vereinseblem

Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x) = -x \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$

und $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x$; $x \in \mathbb{R}$.

- a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte des Graphen von g und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ an.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Tangenten an die beiden Graphen im Punkt $O(0 | 0)$ einschließen.
- b) Zeigen Sie, dass die beiden lokalen Tiefpunkte der Graphen von f und g auf einer gemeinsamen Parallelen zur y -Achse liegen und berechnen Sie ihren Abstand.
- c) Jeder der Graphen von f und g besitzt genau einen Wendepunkt. Diese Wendepunkte sind diagonal gegenüberliegende Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Weisen Sie nach, dass dieses Rechteck symmetrisch bezüglich der y -Achse liegt. Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte des Rechtecks an und bestimmen Sie den Umfang dieses Rechtecks.
- d) Die Graphen der Funktionen f und g schließen im IV. Quadranten eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie die Größe dieser Fläche.
- e) Die in Aufgabe d) betrachtete Fläche zwischen den Graphen von f und g soll im Intervall $[0; 2]$ durch eine Parallele zur y -Achse rechts geradlinig begrenzt werden und in dieser Form als Vorlage für das Vereinseblems eines Angelvereins dienen.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Parallele für den Fall, dass die Fläche des Emblems 2,5 FE beträgt.
- f) Ein Angelsportfreund schlägt vor, die obere Begrenzung des Emblems in Form einer quadratischen Parabel zu gestalten. Diese Parabel soll den gleichen Tiefpunkt und den gleichen Schnittpunkt mit der y -Achse haben wie der Graph von f . Prüfen Sie, ob sich dadurch die rechte Begrenzung des Emblems verkürzt oder verlängert und begründen Sie Ihre Entscheidung.



Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	11	9	8	3	5	4	40

Aufgabe 2.1 CAS: Flug in die Wolken

Ein Flugzeug befindet sich um 04.13 Uhr in der Position $P(2 | 1 | 1,5)$ in einer Höhe von 1,5 km und eine Minute später im Punkt $Q(14 | 7 | 1,8)$ in einer Höhe von 1,8 km (1 LE = 1 km). Das Flugzeug bewegt sich geradlinig von P nach Q und ändert seine Geschwindigkeit nicht.

- a) Geben Sie den Betrag des Vektors \overrightarrow{PQ} an. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Geben Sie eine Geradengleichung für die Flugbahn g an, auf der das Flugzeug fliegt.
- b) Im Punkt $W(38 | 19 | 2,4)$ befindet sich um 04.15 Uhr ein senkrecht aufsteigender Wetterballon. Prüfen Sie, ob der Punkt W auf der Flugbahn des Flugzeugs liegt. Entscheiden Sie begründend, ob das Flugzeug mit dem Wetterballon zusammenstößt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes R , in dem das Flugzeug seine Reiseflughöhe von 10,5 km erreicht.
- c) In der Ebene durch die Punkte $A(10 | 20 | 3,465)$, $B(0 | 0 | 3,465)$ und $C(0 | 20 | 3,565)$ verläuft die untere Grenzschicht einer Wolkendecke. Geben Sie eine Parametergleichung für E_{ABC} an, bestimmen Sie eine Normalenform für E_{ABC} und geben Sie eine Koordinatenform an.

[Zur Kontrolle: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ -100 \end{pmatrix}$ ist ein möglicher Normalenvektor.]

- d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes, in dem das Flugzeug in die Wolkendecke eintritt. Berechnen Sie den Winkel, unter dem das Flugzeug in die Wolkendecke eintritt.
- e) Die Sichtweite in der Wolkendecke beträgt 1,342 km. Ermitteln Sie die exakten Koordinaten des Punktes T auf der vorausliegenden Flugbahn, den der Pilot bei Eintritt in die Wolkendecke gerade noch sehen kann. Berechnen Sie, wie viele Meter über der unteren Grenzschicht der Wolkendecke sich das Flugzeug im Punkt T befindet.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	7	5	7	7	4	30

Aufgabe 2.2 CAS: Rhombus

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

- a) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an und bestimmen Sie die Koordinaten ihrer Achsenschnittpunkte.
Berechnen Sie den Winkel, in dem die Ebene E die x - y -Ebene schneidet.

- b) Ermitteln Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ zu der Ebene E .

Ermitteln Sie die Lagebeziehung der Ebene $F: x + y - 0,5z = 4$ zur Ebene E . Bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E und F .

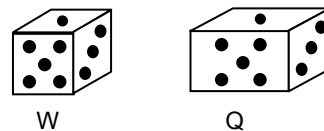
- c) Die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|8)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeigen Sie, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt und berechnen Sie die Größe des Winkels ACB .
Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes Q , der das Dreieck zu einem Rhombus (Raute) ergänzt.
Bestimmen Sie die Koordinaten eines möglichen Punktes C^* auf der z -Achse, so dass der Winkel AC^*B 60° beträgt.

- d) In den Rhombus soll ein möglichst großer Kreis eingeschrieben werden. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes an.
Ermitteln Sie den Radius des Kreises.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	7	7	10	6	30

Aufgabe 3.1 CAS: Zwei Zufallsgeräte

Die beiden Zufallsgeräte Würfel (W) und Quader (Q) tragen nur die Augenzahlen 1, 3 und 5; dabei zeigen gegenüberliegende Seiten die gleichen Augenzahlen.



W ist ein Laplace-Würfel. Q ist ein Quader mit zwei quadratischen Seitenflächen (diese zeigen die Augenzahl 3), die anderen vier Seitenflächen sind nicht quadratisch. Die durch sehr häufiges Werfen dieses Quaders ermittelten relativen Häufigkeiten können als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden:

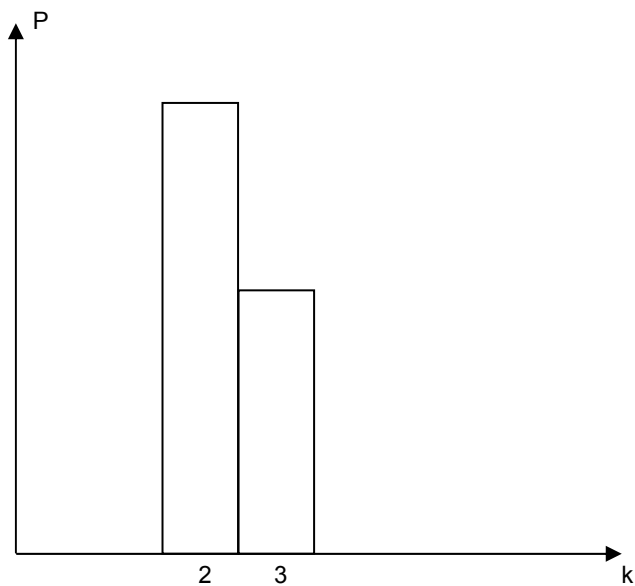
Augenzahl	1	3	5
relative Häufigkeit bei Q	41 %	18 %	41 %

- a) Die beiden Zufallsgeräte werden je einmal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
 A_1 : Die Augenzahl bei W ist nicht 5.
 A_2 : Die Augenzahl bei Q ist nicht 5.
 A_3 : Die Summe der Augenzahlen von W und Q hat genau den Wert 6.
- b) Das Zufallsgerät Q wird 10-mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
 B_1 : Die Augenzahl 3 tritt genau dreimal auf.
 B_2 : Die Augenzahl 3 tritt mindestens dreimal auf.
- c) Je nach der Anzahl n der Würfe variiert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einmal die Augenzahl 3 erzielt wird. Ermitteln Sie für das Zufallsgerät Q diejenige Anzahl n , bei der diese Wahrscheinlichkeit am größten ist.
- d) Olga und Max vereinbaren folgendes Spiel: Olga wirft den Würfel W zehnmal. Sie gewinnt, wenn sie genau dreimal die Augenzahl 3 erzielt. Falls dies nicht der Fall ist, wirft Max den Quader Q zehnmal. Er gewinnt nur dann, wenn er dabei genau einmal die Augenzahl 3 erzielt hat. Sonst endet das Spiel unentschieden. Ermitteln Sie, wer die besseren Gewinnchancen hat.
 [Kontrollergebnis: $P(\text{„Olga gewinnt“}) \approx 26 \%$]
- e) Die Wahrscheinlichkeit P für das k -malige Auftreten der Augenzahl 3 bei 10 Würfeln ist für eines der beiden Zufallsgeräte teilweise graphisch dargestellt (s. Anlage). Entscheiden Sie begründet, zu welchem Zufallsgerät die Darstellung passt. Bestimmen Sie den in der Zeichnung verwendeten Maßstab. Ergänzen Sie die Achseneinteilung der P -Achse und vervollständigen Sie das Diagramm für $k = 1$ und $k = 4$.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	7	5	4	6	8	30

Anlage

Anlage zu Aufgabe 3.1: Würfel und Quader



Aufgabe 3.2 CAS: Kurswahl

Im Abiturjahrgang 2010 belegten im Land Brandenburg die Schülerinnen und Schüler jeweils zwei Leistungskurse: Deutsch belegten 52 %, Englisch 36 % und Mathematik 35 %.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
- A: Ein zufällig befragter Schüler belegt den Leistungskurs Englisch und den Leistungskurs Mathematik.
- B: Von fünf nacheinander befragten Schülern belegen nur der zweite und der fünfte Schüler einen Leistungskurs Mathematik.
- C: Unter zehn zufällig befragten Schülern befinden sich genau drei, die den Leistungskurs Englisch belegen.
- D: Unter 15 befragten Schülern befinden sich höchstens acht Schüler, die einen Leistungskurs Deutsch belegen.
- b) Es werden 35 Schüler befragt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 15 und höchstens 20 Schüler einen Leistungskurs Mathematik belegen.
- c) Ermitteln Sie, wie viele Schüler mindestens befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einen Schüler zu finden, der einen Leistungskurs Mathematik belegt.
- d) p ist der Anteil der Schüler, die das Leistungskursfach Physik belegen und E das Ereignis: Von 12 befragten Schülern belegt genau einer das Leistungskursfach Physik. Bestimmen Sie die möglichen Werte von p , sodass für das Ereignis E die Wahrscheinlichkeit 34,13 % beträgt.
- e) An einem Gymnasium sind 36 der 75 Schüler des Abiturjahrgangs männlich. 25 Schüler und Schülerinnen belegen den Leistungskurs Mathematik. Die Anzahl der Jungen, die den Leistungskurs Mathematik nicht belegen, ist doppelt so groß wie die Anzahl der Mädchen, die den Leistungskurs Mathematik belegen.
Ermitteln Sie die Anzahl der Jungen und Mädchen des Leistungskurses Mathematik.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	4	5	6	4	30